新物理学シリーズ28

山内恭彦監修

超流動

名古屋大学名誉教授 理学博士
山田 一雄

京都大学助教授 理学博士
大見 哲巨

共著

培風館

まえがき

液体ヘリウム 4 の超流動が発見されてから 60 年余，ヘリウム 3 の超流動が発見されてからも 20 年余を経過した。超流動は，同じく長い歴史をもつ超伝導とともに巨視的スケールにわたって量子性を示す特異な現象として注目され，多くの研究者を引き付けながら進展してきた。その中で超伝導の研究は BCS の微視的理論の出現により一区切りを迎えたが，その後に発見されたヘリウム 3 の超流動は，BCS 理論の一般化により急速な発展を遂げた。現在では，ヘリウム 4，3 の超流動について膨大な研究成果が蓄積され，その基本的な事柄はほぼ理解されたと言ってよいだろう。もちろんそれは完成したというわけではなく，現在もテーマによっては活発な研究が続いている。このような状況にある超流動について，どのような内容にまとめるのが適当か苦慮を重ねたが，結局，新物理学シリーズの一巻として収められることを配慮して，できるだけその主旨に沿うこととした。まず超流動の基礎的な事柄については，できる限り詳しい記述を心がけ，量子力学，統計力学，流体力学などの初等的な知識で十分理解できるよう努めた。一方，それの延長上にあり，現在でも興味をもって研究されている話題についても，多少専門的な内容も含めふれることにした。

初めの 2 章から 8 章を Bose 液体ヘリウム 4 に当てた。うち 5 章までは標準的な基礎的事項を，6，7，8 章は渦にかかわるいくつかの問題を適宜まとめた。残る章は Fermi 液体に当てた。9 章ではノーマルな Fermi 液体論を，10 章は 1S 状態の超流動理論を次章の準備として，最終章を液体ヘリウム 3 の超流動とした。ただ，紙数の制限と限られた能力のため，いくつかの重要なテーマ，例えば，転移点近傍での臨界現象，^{3}He $-$ ^{4}He ミックスチャー，ポーラス媒質中の超流動の最近の研究，渦糸の核生成についてのトンネル効果，また超流動 ^{3}He の渦についての最近の研究などは，一部問題の指摘を除いて言及できなかった。このテキストをまとめるに当たり，1 章から 7 章を山田が，8 章から 11 章を大見が分担した。そしてお互いの原稿に目を通し，議論と修正を重ねたが，全体として不統一な部分，間違

い箇所が残ったことと思われる。御批判いただければ幸いである。

この執筆をお薦め下さったのは中嶋貞雄先生である。筆者の山田は30年以上にわたり，先生から統計物理や低温物理について多くのことを教示いただいた。ここに合わせて感謝申し上げる。また筆者らは名古屋大学に在籍中，故碓井恒丸先生から液体ヘリウムについて多くの教えを仰いだ。この本についての御批判が伺えないのは残念であるが，霊前に捧げて感謝の意を表したい。また，山田は名古屋大学理学部，教養部在籍中，多くの同僚との議論を通して多大な恩恵を受け，また大見は京都大学において恒藤敏彦先生から超流動，超伝導について親しくご指導をいただいた。ここに心から感謝する次第である。最後に，終始御支援とお世話を下さった編集部の村山高志，近藤妙子の両氏に厚く御礼申し上げる。

1995年6月

山田　一雄
大見　哲巨

目　次

4. 液体ヘリウム (^{4}He) の基底状態と励起状態　44～67

5. 二流体力学　68～94

6. 超流動流の安定性と臨界速度　95～128

7. 渦糸分布と流体力学　129～155

1. 液体ヘリウム

気体は温度を下げると液体となるが，液化の実現が困難で最後まで残った気体がヘリウムであった。しかし 4.2K という極低温に到達し，始めてその液化に成功したのはライデン大学の Kamerlingh Onnes (1908) である。そしてこの液体ヘリウムを冷媒として用い，水銀の電気抵抗が $T = 4.2$K で突然ゼロとなる超伝導現象を始めて発見したのも K.Onnes (1911) であり，低温物理の研究の幕開けとなった。液体となったヘリウムの温度を，蒸気圧の減圧によりさらに低下させながら固体への変化が探られたがその兆候はなく，むしろ $T = 2.2$K 付近で液体の性質のいくつかに異常変化が見られた。中でも K.Onnes の協同研究者であった W.H.Keesom ら (1932) は比熱曲線がこの温度で異常増大することを観測し，後に P.Ehrenfest はその形がギリシャ文字の λ に似ていることから λ 転移と名づけた。さらに液体ヘリウムの粘性がいくつかの手段で調べられ，通常の流体では流れないような毛細管中の流動が発見された。P.Kapitza(1938) はこの流れを初めて超流動と名づけた。その後多くの特異な性質を示すことが実験的に見つけられ，その解明に向けては F.London，L.Tisza，L.D.Landau らが先駆けとなり，現象論そして量子統計力学に基づく理論が提出され，λ 転移と超流動の研究は発展してきた。

このヘリウム 4(^{4}He) に対し，同位体であるヘリウム 3(^{3}He) は自然界での存在が極めて少ない。しかし原子核反応† により大量の生成が可能になり，その液化に成功したのは，ロス・アラモスの原子力研究所のグループ (1949) である。さらに温度を 1K あたりまで下げて ^{3}He の比熱を調べたが，

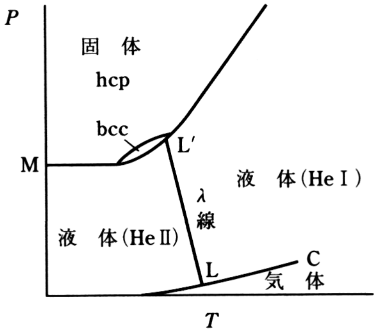
† ^{6}Li + n $\rightarrow$ ^{3}H + ^{4}He, ^{3}H $\rightarrow$ ^{3}He + e を利用。

^{4}Heのような異常はなく，転移らしいものは見つからなかった。Bose統計に従う ^{4}Heの研究は当然ながら超流動状態に向けられたが，一方Fermi統計に従う ^{3}Heでは常流動状態でのFermi液体が，それ自体興味ある対象として研究されてきた。そのようなときに，同じFermi統計に従う金属電子の超伝導が，Bardeen-Cooper-Schrieffer(1957)により理論的に解明され，液体 ^{3}Heに対しても超流動状態への転移が理論的に予言されたが，その観測はかなり後のことであった。実際，低温技術の進歩に支えられ，コーネル大学のD.D.Osheroffらのグループが，^{3}Heの固体の研究中その融解曲線の液体側で，偶然に ^{3}Heの超流動相を発見したのは1972年のことであった。その後の実験および理論的研究の発展はめざましく，その変化に富んだ特性が解明され，現在に及んでいる。このように液体ヘリウムの超流動の研究は，Bose流体 ^{4}HeとFermi流体 ^{3}Heとではその足取りは異なるものの，それぞれの特異性に対する興味は尽きず，低温物理，理論物理の研究対象として長く続けられてきた[1)]。

液体ヘリウムは量子液体とよばれる。常圧で温度を下げてゆくと，通常の古典液体では例外なく固体への相転移が起きるのに対し，液体ヘリウムでは絶対零度まで液体のままにとどまる。一方，今見てきたように，零度に近い低温で通常の液体とは異なった性質(超流動性)を示す液体へと相転移をする。ヘリウム原子の質量が小さいことにより，通常は無視できる量子的零点運動の寄与が重要になり，一方で原子間に働く引力がヘリウム原子では他の原子に比べて小さいために，極低温では量子液体が実現する。さらにこのような極低温での液体状態では量子統計性が顕著となり，Bose統計，Fermi統計に応じて，^{4}Heと ^{3}Heの超流動転移に特徴が現れる。まず，この量子的な液体とは何かを，ヘリウムの相図を眺めながら考え，そして量子統計性の違いが2つのヘリウムの巨視的な性質にどのように現れるかを考察することにする。

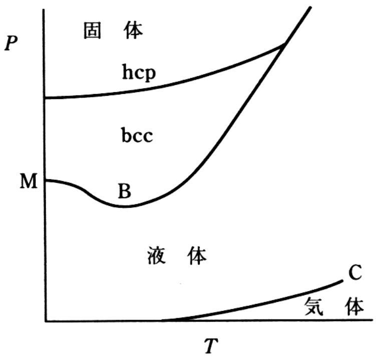
1–1 ^{4}Heと ^{3}Heの相図[2)]

熱平衡系では温度 T と圧力 P を決めるとその状態が定まり，それは T-P 面上の相図(状態図)として表すことができる。液体ヘリウム ^{4}Heと ^{3}Heの相図を1·1図，1·2図に挙げる。これらを見ると，通常の物質に対する1·3図とは著しく様子が違っていることがわかる。まず，臨界点Cが非常に



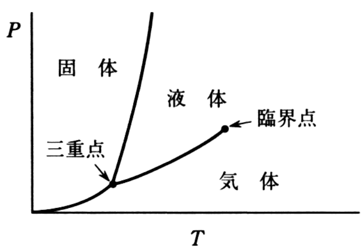
	温度 (K)	圧力 (atm)
C（臨界点）	5.20	2.26
L（λ 線）	2.17	0.05
L′（λ 線）	1.77	29.67
M（0K 融点）	0	25

1·1 図　^{4}He の *P-T* 相図

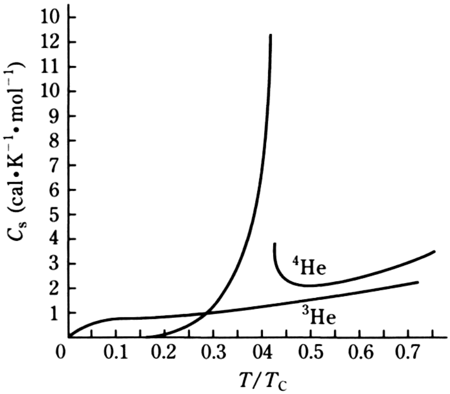


	温度 (K)	圧力 (atm)
C（臨界点）	3.32	1.15
B（最小圧融点）	0.32	28.92
M（0K 融点）	0	33.5

1·2 図　^{3}He の *P-T* 相図



1·3 図　通常物質の相図



1·4 図　飽和蒸気圧下での ^{4}He と ^{3}He の比熱。温度は各々の臨界温度 T_c で規格化した換算温度 T/T_c である。

低い (表を参照) ところにあり，1 気圧の下ではそれより少し低い $T = 4.2$ K(沸点) で始めて液化する。さらに温度を下げていくとき，通常の系では液相 → 固相，あるいは気相 → 固相の転移が起き，これら三相の共存する三重点が存在しているのに対し，ヘリウムの相図では三重点は存在せず，$T = 0$ K まで液体のままである。固相への転移は十分高い圧力，^{4}He では 25 気圧，^{3}He では 30 気圧以上で始めて起きる。また低温では，その境界である融解曲線が ^{4}He ではほとんど水平，^{3}He では負の傾きを示している。

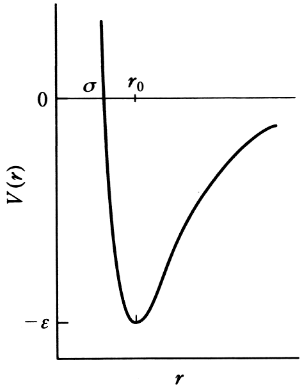
次に 2 つのヘリウムを比較したときの差異に注目する。1·4 図は ^{4}He と ^{3}He の比熱曲線である。^{4}He では $T = 2.17$ K $(T/T_c = 0.417)$ で比熱の異常変化が見られ，この温度で相転移が起きていることがわかる。この転移は λ 転移とよばれ，転移温度を T_λ で表す。1·1 図の λ 線を境にして高温側は通常の液体で常流動相 (He I とよぶ)，低温側は超流動性を示す超流動相 (He II とよぶ) の液体である。一方，同じ 1·4 図で ^{3}He の比熱を見ると，そのような温度付近に何も相転移らしいものは見られない。しかし後で述べるように，^{3}He においても数 mK(10^{-3}K) といった超低温で比熱の異常が観測され，やはり超流動への相転移が起きている。2 つのヘリウムでのこのような違いは，量子統計性の違いにより理解できる。始めに絶対零度まで液体にとどまること，つまり量子液体の意味について，そして量子統計についての議論をしよう。また比熱曲線の詳細については章末の補遺 1 にまとめる。

1–2 量子液体

1–1 節で述べた特徴の一つ，絶対零度まで液体にとどまる理由を考える。周期表において，He，Ne，Ar，Kr，… と縦に並んでいる原子は最外殻の電子配置が閉殻で不活性原子 (希ガス元素) とよばれる。これらが低温でそれぞれの密度 (モル体積) の液体として存在するのは，原子の間に引力が働くからである。一方，原子があまり近づきすぎると逆に斥力が働く。二原子間の距離 r の関数として相互作用 $V(r)$ を表すのに，Lennard-Jones のポテンシャル

$$V(r) = 4\varepsilon\left[\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{6}\right] \tag{1.1}$$

を採用しよう (1·5 図)。これは $r=\sigma$ で $V(r)=0$ となり，原子が σ より近づくと強い斥力が働く。これは 2 つの原子の電子が重なることを禁止する Pauli の原理によるもので，$\sigma/2$ は原子のハード・コア半径とよばれる。距離 r が σ より離れて $\sigma<r$ となると，van der Waals 引力 ($-(\sigma/r)^6$) の寄与が大きくなる。そして r が $r_0=2^{1/6}\sigma$ で極小値 ε をとり，それより離れるに従って引力は弱まる。この引力は原子に生ずる分極効果によるものである。表 1 に見られるように，σ，ε の値は原子により異なり，したがって $V(r)$



1·5 図 Lennard-Jones のポテンシャル

表 1

	ε (K)	σ (Å)	Λ^*
^{3}He	10.2	2.56	3.05
^{4}He			2.64
Ne	35.6	2.74	0.59
Ar	120	3.41	0.19
Kr	166	3.65	0.10
Xe	230	3.92	0.06

も希ガス原子の各々で異なるが，距離 r を σ でスケールして眺めることにすれば，異なる原子は互いに相似となる。言い替えれば，$V(r)=\varepsilon\,\phi(r/\sigma)$ と書いたとき，ϕ はいろいろな原子に対し共通な普遍関数となる。これを認めると原子系の熱力学的性質，中でも状態方程式に対し，de Boer の対応状態の原理[3)]が成立することになる。体積 V，温度 T，圧力 P をσ,ε で換算した無次元量

$$V^*=\frac{V}{N\sigma^3},\qquad T^*=\frac{k_{\rm B}T}{\varepsilon},\qquad P^*=\frac{P\sigma^3}{\varepsilon}$$

を用いれば，状態方程式が

$$P^*=F(V^*,T^*) \tag{1.2}$$

と表され，このとき関数 F がすべての物質に対して共通な普遍関数となるというのが，対応状態の原理である。これは確かに，Ne，Ar，$\cdots$ の希ガス原子系に対してはよい精度で成立しているが，ヘリウム原子に対しては成り立っていない。これは上の議論では考えなかった零点運動エネルギーの寄与が重要になるからである。

$T=0$ K の基底状態で液体あるいは固体のいずれが実現するかは，運動エネルギーとポテンシャル・エネルギーからなる系の全エネルギーをそれぞれの場合に求め，いずれがより低くなるかを調べることにより判定される。ここでは次元解析による半定量的な考察をする。通常の系では表 1 に見たように，ポテンシャルの極小値 ε が十分深く，その点のまわりの微小振動である量子的零点運動のエネルギーはそれに比べて無視できる。そのため原子は規則正しく配列した極小点に局在し，結晶格子を組んで固体を構成する。一方，他の希ガス原子に比べて He の極小値 ε は非常に浅く，それに加え質量が軽いために零点運動の寄与が重要になる。量子力学によると，原子が狭い領域に局在すれば不確定性原理により零点運動のエネルギーが増大する。液体の中の 1 個の原子に注目し，それを取り囲む最近接の原子が作る体積を考え，その中を動くときのエネルギーを考える。その範囲は平均原子間隔 $r_{\rm m}$ 程度，より正確には $r_{\rm m}$ から原子の大きさ σを差し引いた長さ a の程度となる。このとき $\Delta p\simeq\hbar/a$ と表されることを考慮すれば零点エネルギー $E_{\rm z.p}=(\Delta p)^2/2m$ は

$$E_{\rm z.p}=\frac{\hbar^2}{2ma^2} \tag{1.3}$$

となる。$r_{\rm m}\simeq 3.2$Å$,\sigma\simeq 2.6$Å を用いて $a\simeq 0.6$Å をとると ^{4}He では温度

に換算して，$E_{\rm z.p} \simeq 16$ K となり ε より大きくなる。量子効果を表すパラメーターとして，$E_{\rm z.p}$ と ε の比から得られる無次元量 Λ^* (ただし a の代わりに σ を用い，数因子も考えない) を

$$\Lambda^* = \frac{h}{\sigma\sqrt{m\varepsilon}} \tag{1.4}$$

により導入すると，希ガス原子に対する Λ^* の値は表 1 のようになる。この場合の状態方程式は

$$P^* = F(V^*, T^*, \Lambda^*) \tag{1.5}$$

となり，一般に Λ^* 依存性をもつと同時に，F は普遍関数ではなくなる[3)]。He では Λ^* が大きく量子効果が顕著になる。そして r_0 より $r_{\rm m}$ が大きくなっており，確かに液体状態が量子効果により実現していることが理解できる。液体ヘリウムを固体にするには相図にあるように十分高圧下に置くことが必要である。

^{4}He の相図でもう一つの特徴は低温 ($T = 2$K 以下) で融解曲線の傾きがほとんどゼロになっていることである。融解曲線上ではよく知られているように Clausius-Clapeyron の関係式

$$\left(\frac{dP}{dT}\right)_m = \frac{S_l - S_{\rm s}}{V_l - V_{\rm s}} \tag{1.6}$$

が成り立つ。右辺は液体 (l) から固体 (s) への凝固に伴うエントロピー変化 ΔSと，体積変化 ΔV の比である。通常の物質では ΔS，ΔVともに正であり，曲線は正の勾配をもつ。^{4}He では$\Delta S \simeq 0$，つまり液体のエントロピーが整然とならんだ秩序ある固体と同じであることを示している。絶対零度に向けてエントロピーはゼロになるという熱力学第三法則に呼応して，超流動状態のヘリウムはエントロピーの小さい秩序のある液体であることを示している。3 章で述べるように，これは Bose-Einstein 凝縮が起きていることを考慮すれば理解できることである。一方，^{3}He の融解曲線は $T = 0$ K での 33.5 気圧から $T = 0.32$ K の 29 気圧へと右下がりになっている。これはすぐ後に述べるように，^{3}He が 核スピン $\hbar/2$ を持ち，Fermi 縮退する液体に比べて固体の方がその自由度によるエントロピーを余分にもつ結果である。

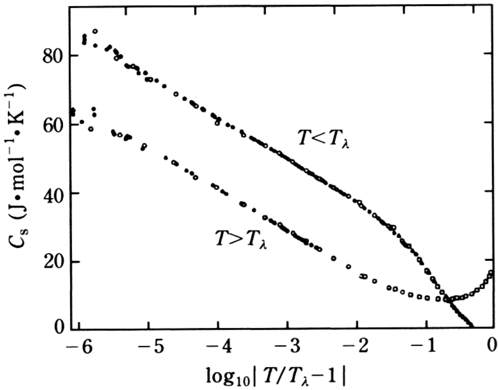
1–3　量子統計

^{4}He 原子は陽子 2 個，中性子 2 個，電子 2 個からなる偶数個の複合粒子であるのに対し，^{3}He 原子は奇数個 (中性子が 1 個少ない) からなっている。したがって ^{4}He の多体系の波動関数は，2 個の原子の座標の入れ換えに対し不変であり，複合粒子を 1 個の粒子とみなすときには Bose 粒子である。一方，^{3}He では，2 個の原子の座標を入れ換えたとき波動関数の符号が変わり，核スピン $\hbar/2$ をもつ Fermi 粒子である。この相異が 2 つのヘリウムの巨視的な性質に著しい違いとなって現れる。実際，先の相図そして比熱曲線で見たように，^{4}He では T_λ で Bose-Einstein 凝縮が起き，超流動状態への相転移が起きていると考えられる。他方，^{3}He ではその付近の温度では相転移は起きていない。^{3}He の比熱はスムースな曲線で，これは十分低温での常流動 Fermi 液体 (Fermi 粒子間の相互作用を考慮した量子液体) の比熱である。しかし数 mK まで温度が下がると，^{3}He にも比熱の異常が現れ，超流動状態への相転移が起きることを示している。この相転移は金属内の電子 (Fermi 粒子) が超伝導状態へ転移する機構と類似している。転移温度において 2 個の ^{3}He が対を形成し，あたかも Bose 粒子のように凝縮したものと考えられる。これについては 9 章以下で詳しく議論する。2 つの液体ヘリウムでの量子統計の違いが，同じ超流動という巨視的な量子現象を示すとはいえ，その発現のしかたに著しい違いをもたらした原因である。また通常の物質は低温で固体になると，原子の位置を交換する確率はほとんどなくなる。しかし超低温の固体ヘリウムは例外で，特に固体 ^{3}He では原子の交換相互作用によるスピンの反強磁性的配列が実現している。

補遺 1　転移点での比熱

磁性体等でよく知られているように，相転移を起こす温度 (転移点) の前後では熱的なゆらぎが大きくなるため，比熱に異常な増大が見られ，これが相転移が起きていることの証しとされる。先に見たように液体ヘリウムでは液体の異なった相の間の転移，常流動相から超流動相への転移が起きる。ここでは，液体ヘリウムの転移点での比熱について，現在までの研究成果をまとめておく。

^{4}He の比熱は 1·4 図に見られるように転移点 $T_\lambda = 2.17$K で異常増大を示す。圧力一定の比熱 C_p の測定値は，T が T_λ に近づくとき，$t = T/T_\lambda - 1$ で定義される換



1·6 図　T_λ 近傍の飽和蒸気圧下の比熱。数箇所での測定結果がまとめてプロットされている。

算温度を用いて，

$$C_p = \begin{cases} -A\log_{10} t + B, & T > T_\lambda \\ -A'\log_{10}|t| + B', & T < T_\lambda \end{cases} \tag{1}$$

と表され，$t \to 0$ で対数的な発散を示している[4]。1·6 図は飽和蒸気圧でのその様子を表したものである $(10^{-1} \gtrsim |t| \gtrsim 10^{-6})$[5]。そして高温側から T_λ に近づくときと，低温側からの比熱曲線の各係数 A, A' の値はほぼ等しく見える。

一方，相転移の臨界現象に対して多くの成功をおさめた，くりこみ群の理論は種々の物理量の転移点での異常を $|t|$ のベキ関数で表す。比熱の異常部分に対しては臨界指数 α, x を用い

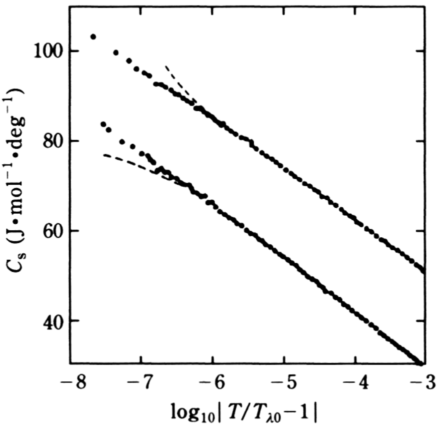
$$C_p = \frac{A}{\alpha} t^{-\alpha}(1 + D\,t^x) + B, \qquad T > T_\lambda \tag{2}$$

と表す。$T < T_\lambda$ に対しても A', α', D', x', B' を用いて同様に書く。

最近，J.A.Lipa，T.C.P.Chui[6] らは T_λ のごく近くまでの測定を行い $(10^{-3} \gtrsim |t| \gtrsim 3 \times 10^{-8})$，その結果を (2) と比較し，最もよく符合する係数として，

$$\begin{gathered} \alpha = \alpha' = -0.0127 \pm 0.0026, \qquad x = x' = 0.5 \\ A/A' = 1.058 \pm 0.004, \qquad B - B' = 0.1 \pm 3.1, \\ D = -0.022, \qquad D' = -0.020 \end{gathered} \tag{3}$$

を得た。これらの値は現在までのくりこみ群の理論的計算値[7),8)]とかなり近いもの



1·7 図 T_λのごく近くまでの測定結果 ($|T/T_{\lambda 0}-1| \lesssim 3\times 10^{-8}$)。$T_{\lambda 0}$は液体表面の転移温度，破線は重力の効果 (脚注参照) が補正される前の結果である。

となっている。一方，この測定値を $\log_{10}|t|$ に対してプロットしたのが 1·7 図†である。これを見ると 1·6 図を $\log_{10}|t| \simeq -8$ まで延長したものと似ているが，これは恒等式

$$\log t = \lim_{\alpha\to 0}(1-\exp(-\alpha\log t))/\alpha = \lim_{\alpha\to 0}(1-t^{-\alpha})/\alpha$$

を見れば理解できる。しかし α は小さくはあるがゼロではなく，もし (3) の結果を認めれば，比熱は $T = T_\lambda$ で従来考えられてきたように，log で発散するのではなく，有限な値 (カプス状) をとることになる。

^{3}He の比熱は，1·4 図の温度スケールでは異常は見られなかったが，超低温の mK のスケールでみると相転移に伴う異常が観測されている。超低温での相図 (11·1 図) に見られるように，21.5bar 以上の圧力では A 相，B 相とよばれる 2 つの超流動相がある。また ^{3}He では，先に述べたように核スピンに伴う磁気モーメントがあるため，磁場をかけると A 相はさらに分かれ A_1 とよばれる相が実現する。これらの相転移に伴う比熱については 11 章で詳細に述べる。

† この測定は，高さ 3mm の容器に入ったヘリウムでなされた。このとき T_λ にきわめて近づくと ($|t| \simeq 10^{-8}$)，λ 線が圧力 P に対して負の傾き (1·1 図参照) をもっているため，容器の上部のヘリウムは P が小さく超流動相となるが，底の部分では P が大きく常流動相となり，2 相が共存することになる。このような重力の効果は理論的に評価できるので，それを補正して測定結果を解析したのが (3)，そして 1·7 図である。

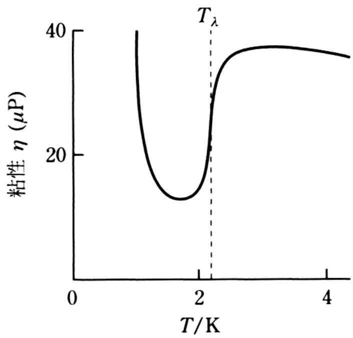
2. 超流動相 (^{4}He) の性質

超流動液体ヘリウム (^{4}He) は多くの特徴的な性質を示すが，中でも超流動の名称通り流れの特性が顕著である。この章ではまず，その特異な振舞いのいくつかを眺めることにする[1)]。これらの性質は，通常の流体では見られないものであったが，Tisza(1938) は二流体模型とよばれる現象論を提唱して観測事実を見事に説明した。そしてこの模型は，現在では単なる模型でも現象論でもなく，以下の章でみられるように量子統計力学の枠内で基本的には理解されている。また渦流も通常流体とは異なった量子的性質を持ち，その運動は超流動流の安定性にも深くかかわっていることから，現在でも活発な研究が行われている。

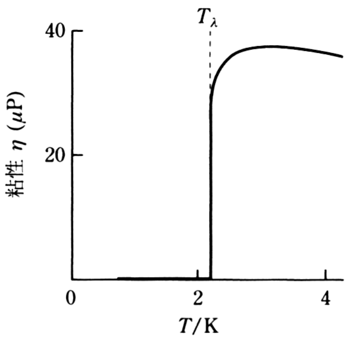
2–1 粘　　性

通常の流体は，その大きさは物質によりさまざまであるが，粘性をもっている。微視的には流体を構成している分子間に相互作用があり，それらの衝突過程を通して運動量が緩和されることから巨視的な粘性が現れる。ところが液体ヘリウムでは，この粘性の異常な振舞いが発見され，超流動研究の出発点となった。

粘性の測定をする方法として回転粘性計がある。二重円筒の間に流体を入れ，内側の円筒を回転させ，流体を通して外側の円筒に伝わるトルクを測定するものである。その温度変化に注目する。まず $T > T_\lambda$ (T_λ：転移温度) で測定すると，通常の流体のように粘性 η は有限な値をもつ。温度を下げてゆくと T_λでかなりの温度変化はあるものの，2·1(a) 図に見るように



2·1 (a) 図　回転粘性計
μP (マイクロ・ポワズ)



2·1 (b) 図　細管中の Poiseuille 流

有限な値を示す。

もう一つの粘性を測定する手段として，細管中の Poiseuille 流を利用するものがある。流体力学によると，断面の半径 a の細管中の平均流速 V は，長さ l の管の両端にかける圧力差 ΔPに比例し，粘性 η に逆比例して

$$V = \frac{a^2}{8l\eta}\Delta P \tag{2.1}$$

と与えられる (Poiseuille 流の平均流速 Vについては 2–5 節の (2.15) 式を参照)。この方法により液体ヘリウムの η を測定すると，T_λ より高い温度では，回転粘性計の測定と同様な性質を示すが，$T < T_\lambda$ の温度になると，圧力差にはほとんどよらない流れが観測され，この振舞いは管径が $10^{-4} \sim 10^{-5}$cm ほどの毛細管になっても同じであることがわかった ($T > T_\lambda$ のときには，このような細管では粘性のため流れない)。圧力差がなくても流れる流体は，粘性のない ($\eta = 0$) 流体のように見える。これを図示したものが 2·1(b) 図である。Kapitza はこの流れを**超流動**と名づけた。このように 2 つの測定結果は一見したところ矛盾しているように見えるが，実はこれが超流動液体ヘリウムの特性であり，以下で述べる二流体模型により矛盾なく理解された。

流れの速度が増してある臨界値を越えると，超流動相には渦糸が発生し，細管流では渦糸のからみあった乱流状態が実現する。そこでは新たな摩擦ないし粘性が発生し，超流動乱流特有の現象が見られる。これについては 7–3 節で触れる。

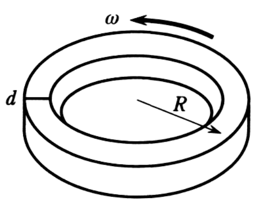
2–2　回転流の超流動性[2)]

超流動の特性を調べるもう一つの実験は回転流の測定である。液体ヘリウムを2·2図のような半径が R, 断面の径が d のトーラス容器中に満たす。ただし話を簡単にするため $R \gg d$ とする。実験は容器の回転によって生ずる角運動量の測定を，次の2通りの実験で試みる。

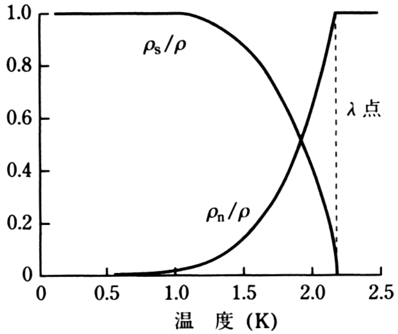
まず実験(I)では，最初温度を $T > T_\lambda$ に保ち容器を緩やかな角速度 ω で回転する。緩やかといったのは，ある臨界値 ω_c に対し，$\omega \ll \omega_c$ を意味する(ω_c については5–1節で議論する)。このときは，流体全体が容器とともに回転するので，その角運動量は古典的な値 $L_c = I_c\omega$ となる。ここで I_c は古典的な慣性モーメントで，上述の幾何学的条件を考慮すると，$I_c = \rho V R^2$ と近似的に与えられる。ここで ρ と V は流体の密度と全体積である。次にこの回転を維持したまま温度を T_λ 以下に冷やして He II(超流動相)の状態に移ると，観測される角運動量は L_c よりも小さな値，

$$L(T) = \frac{\rho_n}{\rho} I_c \omega = \rho_n V R^2 \omega \tag{2.2}$$

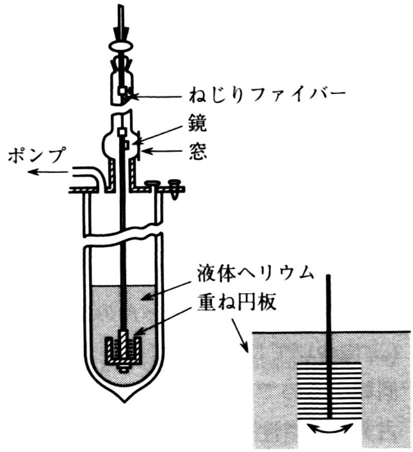
となる。L_c との違いは全体の ρ の代わりに，これより小さい密度(それを ρ_n と書く)が現れたことである。この結果は，流体の一部が回転に参加しなくなり，残りの部分(常流体とよばれる)のみが容器とともに流れていることを示唆している。この ρ_n は**常流体密度**とよばれ，温度により変化し，$T = T_\lambda$ では $\rho_n = \rho$ であるが，温度の低下とともに減少し，$T = 0$ で $\rho_n = 0$ となる量である(2·3(a)図参照)。この現象は**非古典的回転流**と称され，回転している容器と流体が熱平衡状態にあるときの，超流動の一つの特性を表している。非古典的回転流も二流体模型により理解されるが，そ



2·2図　トーラス容器の回転



2·3 (a) 図 ρ_n, ρ_s の温度変化。ρ で規格化してある。



2·3 (b) 図 Andronikashvili による ρ_n の測定

の本質については 5 章で議論する。そして実際の測定については 6 章で触れる。

実験 (II) は，同じように $T > T_\lambda$ に保ち，容器を角速度 ω で回転する。ただし今度は，$\omega \gg \omega_c$ を満たす速さで回転し (この理由についても 5 章で述べる)，これを維持したまま温度を T_λ 以下に下げて He II の状態に移る。ここで実験 (I) とは異なり，容器の回転を止め静止させる。このとき見られる顕著なことは，古典流体のように流体全部が静止するのではなく，流体の一部は流れを持続し有限な角運動量が観測されることである。それは

$$L(T) = \frac{\rho_s}{\rho} I_c \omega = \rho_s V R^2 \omega \tag{2.3}$$

と表される。ここで ρ_s は $\rho_s = \rho - \rho_n$ により定義され，**超流体密度**とよばれる。この結果は，実験 (I) とは逆に，ρ_s で特徴づけられる 超流動成分が何か特別な速度場で流れていることを意味している。しかも，この超流動流は長い時間減衰しないで安定に持続するため，**永久流** (persistent flow) とよばれる。この状態は，流れのないときに比べてエネルギーの高い状態であるが，それが十分長い時間安定であることから，統計力学でいう**準安定状態** (metastable state) が実現していると考えられる。しかし流れの速度がある臨界値を越えると，減衰が見られるようになり文字通りの永久流

ではなくなる。この準安定状態としての永久流は，超流動のもう一つのそして最も顕著な特性であり，実験事実とともに6章で議論する。

2–3　二流体模型

先の粘性や上記の回転流でみられた2通りの超流動液体ヘリウムの特性は，次のような現象論的二流体模型を導入することで理解される。$T < T_\lambda$ となると，流体は独立な2つの成分，超流体と常流体とから構成されているように振舞い，それぞれが密度 $\rho_\mathrm{s}, \rho_\mathrm{n}$を伴い速度場 $\boldsymbol{v}_\mathrm{s}, \boldsymbol{v}_\mathrm{n}$ で流れる。そして流体全体の密度 ρ と運動量密度 $\boldsymbol{j}$ は，

$$\rho = \rho_\mathrm{s} + \rho_\mathrm{n} \tag{2.4}$$

$$\boldsymbol{j} = \rho_\mathrm{s}\boldsymbol{v}_\mathrm{s} + \rho_\mathrm{n}\boldsymbol{v}_\mathrm{n} \tag{2.5}$$

により表されると考える。ここで ρ_nは2·3(a)図に示すように，温度に依存して0からρまで変化し，ρ_sのほうは ρ_nとちょうど相補的な温度変化をして，(2.4)を満たしている（ρ 自身はわずかな温度変化を示すがほぼ一定である)。

ρ_nの測定はE.L.Andronikashvili[3]により初めて行われた。薄い金属円板を0.2mm程度の間隔で重ねてねじりファイバーに固定する。それを液体ヘリウムの中につけ回転振動させて慣性モーメントを測定する(2·3(b)図)。板が回転振動するとき，その運動の影響が及ぶ範囲は流体の粘性に依存する。流体力学[4]によると，その影響が及ぶ範囲(粘性長) l_η は，円板の振動数を ω，粘性率を η として，$l_\eta = (2\eta/\rho_\mathrm{n}\omega)^{1/2}$ と与えられる†。円板の間隔はこの l_η より十分狭くしてあるため，常流体はすべて円板の運動に付着して動く。容器に液体がないときと常流体が付着しているときの振動数の差からρ_nが求まる。2·3(a)図をみるとρ_nは1Kぐらいから増大してT_λで ρ となる。4章で見るように常流体の実体は熱的に励起された量子(フォノン，ロトン)の気体とみなされ，温度の上昇に伴い励起量子の個数が増大することから図のような温度変化を示す(5–2節を参照)。ρ_nの値は他の実験からも詳細に調べられている。

---

† 板に接する流体の部分は，板の運動と同じ速度で振動するが，板から離れるに従い，その振動は内部に向けてその距離 x とともに，$\exp(-x/l_\eta)$ で減衰することが知られている。

常流体はその名が示すように，普通の流体のように振舞い，液体の持つエントロピーはすべてこれが担い，粘性を伴う。したがって，$\boldsymbol{v}_{\rm n}$ の運動は通常の流体力学で知られている Navier-Stokes の式に似た運動方程式に従う。これについては 5–3 節で述べることにする。

一方，超流体は散逸を伴わない理想流体のように振舞い，エントロピーを伴わないで，しかも粘性なしで流れる。それでは $\boldsymbol{v}_{\rm s}$はどのような運動方程式に従うのだろうか。本質的な議論は次章にゆずることにして，ここでは流体力学的な導出をしておく。まず超流体のみが流れているとして，単位体積当たりの熱力学的エネルギーの関係式

$$dE = TdS + \left(\mu + \frac{\boldsymbol{v}_{\rm s}^2}{2}\right) d\rho + \rho \boldsymbol{v}_{\rm s} \cdot d\boldsymbol{v}_{\rm s} \tag{2.6}$$

を出発点にとる。E, S, ρ はそれぞれ，内部エネルギー，エントロピー，質量の密度であり，μは単位質量当たりの化学ポテンシャルである。$\boldsymbol{v}_{\rm s}$ を含む項は超流体の運動エネルギーの微小変化 $d(\rho \boldsymbol{v}_{\rm s}^2/2)$ からの寄与である。超流体のみが関与しているとしているので，ρ は $\rho_{\rm s}$を意味し，さらに (2.6) のエントロピー項はゼロとしてよい ($dS=0$)。次に平衡状態からわずかにはずれた状態の振舞いを調べる目的で，(2.6) 式が局所的にも成立していると仮定する。言い替えれば，考察している系の中の位置 $\boldsymbol{r}$，時刻 t における局所的状態量，$E(\boldsymbol{r},t), \rho(\boldsymbol{r},t), \cdots$ に対しても (2.6) の関係が成り立つとする。さらにこれが微小時間での変動量の間の関係式として

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \left(\mu + \frac{\boldsymbol{v}_{\rm s}^2}{2}\right) \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \boldsymbol{v}_{\rm s} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}_{\rm s}}{\partial t} \tag{2.7}$$

と書けるとする。ここで ρ, Eは保存量であるから次のような局所的保存則，

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}_{\rm s})$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\boldsymbol{v}_{\rm s}^2}{2}\right) \rho \boldsymbol{v}_{\rm s}\right]$$

が成立しているはずである。これを用いて (2.7) の ρ, Eの時間微分を空間微分で表すと，最終的に

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_{\rm s}}{\partial t} = -\nabla \left(\mu + \frac{\boldsymbol{v}_{\rm s}^2}{2}\right) \tag{2.8}$$

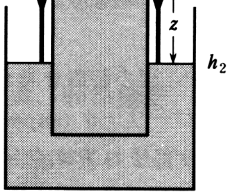
を得る。このように，$\boldsymbol{v}_{\rm s}$は化学ポテンシャルの勾配により運動する。二流体の実体が何であるについては 3 章以下で議論される。

ところでこのような二流体模型を認めると，先の一見矛盾したように見えた粘性の振舞いは次のように理解できる。回転粘性計の測定においては，常流体の粘性が測定されたとすればよい。一方，極細管での Poiseuille 流では，常流体は粘性のため管壁にロックされて流れないが，粘性を持たない超流動成分は圧力差がなくても流れたと理解できる。また 2–2 節でみた T_λ 以下でのトーラス容器の非古典的回転流 (実験 (I)) では，回転容器と熱平衡にあるのは常流体成分のみで，それが容器とともに回転しているが，超流動成分は静止していて流れに参加しないとすれば，(2.1) 式の結果となる。一方，実験 (II) では，容器の静止に伴い常流体は静止するが，超流動成分は流れを持続して (2.2) 式の結果となる。ただしこの流れが永久流として準安定であることについては，3 章，6 章で議論する。

2–4　薄膜の超流動

2·4 図のように液体ヘリウムの入ったビーカーを液体ヘリウム槽に漬けたとき，ビーカーの液面 h_1 がヘリウム槽の h_2 より高いと，ビーカー中のヘリウムはガラスの表面をつたってヘリウム槽に流出し，その流れは液面の差がなくなるまで続く。これはガラスの基盤上に薄い膜ができ，それが通常の流体では考えられない速さで流れた結果で，これも二流体模型で理解できる。

固体表面に生成される膜は，ガラスの基盤の原子と液体原子の間に働く van der Waals のポテンシャル ϕ，液面からの高さ h での重力ポテンシャル gh，そして液槽と熱平衡にある蒸気圧によりその厚さ d が決まる。飽和



2·4 図　超流動薄膜流

蒸気圧の液体ヘリウムでは流れのない場合，d はおよそ 20 $\simeq$ 30nm の薄さである。このような薄い膜では常流体は粘性のため流動できず (できたとしても極めて緩やかで測定には長時間かかる)，超流体のみが流れたと考えられる。この場合 (2.8) は拡張されて，

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_s}{\partial t} + \nabla(\mu_0(P,T) + \phi + gh) = 0 \tag{2.9}$$

となる。ここで μ_0 はバルクの液体ヘリウムの化学ポテンシャルである。膜に沿ってビーカーの液面 h_1 からヘリウム槽の h_2 までの積分をとれば，2 つの位置で μ と ϕ は等しいとして，

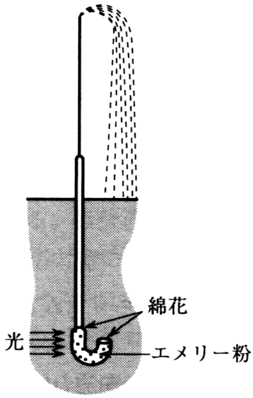
$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{h_1}^{h_2} v_s dr + g(h_2 - h_1) = 0 \tag{2.10}$$

となり，超流動の加速が起き，サイフォン (siphon) となる。典型的な条件下では $v_s \simeq 20$ cm/s となり，見ているうちに流出が起きることになる。この薄膜の流れにより，普通の容器に栓をしたのではヘリウムは隙間からこぼれ出てしまうことはよく知られている。液体ヘリウムの薄膜およびその表面の波動については，5 章の第三音波の議論で再度ふれる。

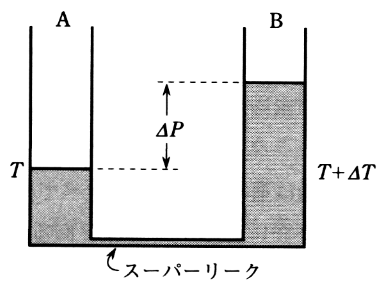
2–5 熱圧力効果

超流動成分のみが流れるような装置を用いて，古典流体では見られない，温度と圧力が直接結びつく熱圧力あるいは熱機械 (themomechanical) 効果という現象が見られる。これは液体ヘリウム研究の初期に別名，噴水効果 (fountain effect) として注目された。2·5(a) 図に示す装置は，液体ヘリウム槽の中に別の湾曲した管を漬け，下部にエメリー粉とよばれる粉が詰められている。この部分の細隙は超流体のみが流動でき，光を当てて温度が上がると，管の先から液体ヘリウムが噴水となってとびでる。この現象は温度の上がった部分に超流体のみが流入し，そこの圧力が上昇したことによると推察できる。

これを理解するのに 2·5(b) 図の装置を考える。2 つの容器 A，B は超流体のみを流す極細管 (スーパーリーク (superleak) とよばれる) で結ばれている。初め，A，B は温度 T，圧力 P の熱平衡にあり液面は同じ高さにある。そこで B の温度を dT だけ上昇させると，スーパーリークの両端に化学ポテンシャルの微少差



2·5 (a) 図　噴水効果



2·5 (b) 図　熱圧力効果 (模式図)

$$d\mu = \mu(P + dP, T + dT) - \mu(P, T) = \rho^{-1} dP - \sigma dT \tag{2.11}$$

が生じる。最後の表式は dP, dT について展開した結果で，熱力学では Gibbs-Duhem の関係式とよばれている。ここで密度 ρ と単位質量当たりのエントロピー σ は，次の熱力学的関係式で与えられる。

$$\rho^{-1} = \left(\frac{\partial \mu}{\partial P}\right)_T, \qquad \sigma = \left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_P$$

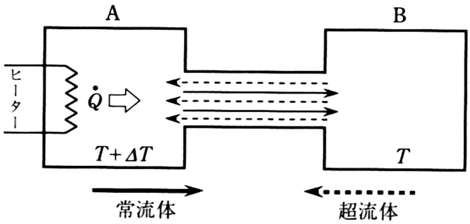
この化学ポテンシャルの差により超流体は加速 ((2.8)) され，A から B への流動が起きるが，その差がなくなる ($d\mu = 0$) と，流れは止まり力学的な平衡状態に達する。そのとき

$$dP = \rho\sigma dT \tag{2.12}$$

の関係が成立する。(2.12) は London の関係式とよばれ，(2.8) において v_s の定常状態 ($v_s = 0$ も含め) が成立して化学ポテンシャルの差がなくなった状態では，温度差があると圧力差が発生するわけで，これが熱圧力効果である。古典流体では見られない噴水効果はこのようにして起きる。

2–6　内部対流，超熱輸送，第二音波

上に述べた熱圧力現象では，超流体のみを通す細管であったが，常流体も流通できるほどの太さの管であるときには，これも液体ヘリウムに特徴的な現象である**内部対流** (internal convection) が起きる。そしてこれによる



2·6 図 熱対向流

熱の輸送は通常の熱伝導に比べて桁違いに大きいことも液体ヘリウム (^{4}He) の二流体性に起因する特性である。

内部対流を実現する手段の一つとして，2·6 図のような**熱対向流** (thermal counter flow) とよばれるものがある。2 つの流体が流通できる管で液体ヘリウムの A,B 2 つの槽が結ばれており，A にはヒーターがあり直接熱の供給ができる。A 槽の温度が上がると圧力差が発生し，常流体が熱エネルギーを担って低温の B 槽に向けて流れる。このとき，図から明らかなように流体全体の質量流は平均としてゼロに押さえられているので，(2.5) により $\boldsymbol{j} = \rho_s \boldsymbol{v}_s + \rho_n \boldsymbol{v}_n = 0$ とおくと，

$$\boldsymbol{v}_s = -\frac{\rho_n}{\rho_s}\,\boldsymbol{v}_n \tag{2.13}$$

となり，超流体は常流体と反対方向に流れる。これが熱対向流である。

液体ヘリウムではこの熱対向流が，通常の熱伝導に比べてはるかに高い効率で熱を伝えることが知られており，超流動の**超熱輸送**とよばれることもある。実験に際し，T_λのすぐ上の温度にある液体ヘリウムは激しく沸騰をしているのに対して，T_λ以下になると急に沸騰は止まり静かな状態に移行することが知られているが，これは超熱輸送によるものである。

そこで超熱輸送の意味と，その大きさについて考察しておく。半径 a の断面をもつパイプ中にヒーターから定常的にエネルギーが流入すると，パイプの軸方向に $\boldsymbol{v}_s$ と $\boldsymbol{v}_n$ の流れ，そして温度と圧力の勾配が生ずる。定常状態では，$\boldsymbol{v}_s$に対する (2.8) から，London の関係式 (2.12) により熱圧力効果が成立している。常流体は粘性係数 η_nを持つことから，$\boldsymbol{v}_n$ は古典流体の Navier-Stokes の式に従うことになり (詳しくは 5–2 節を参照)，定常状態での解は Poiseuille の流れとして知られている[4)]。管の中心軸を x 軸にとり，断面内の軸中心からの距離を rとすると，圧力勾配は x 方向にある

ので，それによる速度場の x 成分は，

$$v_{\mathrm{n}}(r) = -\frac{a^2}{4\eta_{\mathrm{n}}}\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)\frac{dP}{dx} \tag{2.14}$$

と与えられる。管の断面について平均した流速 V_{n} は

$$V_{\mathrm{n}} = \frac{1}{\pi a^2}\int_0^a v_{\mathrm{n}}(r)2\pi r dr = -\frac{a^2}{8\eta_{\mathrm{n}}}\frac{dP}{dx} = -\frac{a^2\rho\sigma}{8\eta_{\mathrm{n}}}\frac{dT}{dx} \tag{2.15}$$

となる。最後の等式は上述の (2.12) を用いて得られた。粘性測定の項で述べた圧力差に比例する流速 (2.1) は上式で与えられたものである。ところでヒーターにより単位時間当たり $\dot{Q}$ のエネルギーが発生すると，それは常流体のエントロピー流 J_S として運ばれ，それは平均流速 V_{n} を用いて

$$\frac{\dot{Q}}{\pi a^2} = T J_S = \rho\sigma T V_{\mathrm{n}} = -\kappa_{\mathrm{eff}}\frac{dT}{dx} \tag{2.16}$$

と書くことができる。ここで κ_{eff} は熱対流によるエネルギー流を温度勾配に比例するとしたときの有効熱伝導係数で，(2.15) を参照すれば

$$\kappa_{\mathrm{eff}} = \frac{(a\rho\sigma)^2 T}{8\eta_{\mathrm{n}}} \tag{2.17}$$

と与えられる。これは管径 a に依存するが，例えば $a = 10^{-2}$cm の場合，常流動状態での熱伝導係数 κ の値と比較すると，$\kappa_{\mathrm{eff}} \simeq 10^6\,\kappa$ となり熱対流によるエネルギー輸送が桁違いに大きいことを示している†。

なおヒーターによる $\dot{Q}$ がある臨界値を越すと，(2.16) のような熱流 $T J_S$ と温度勾配 dT/dx の線形関係が成立しなくなる。これは流速がある**臨界速度**以上になると，すぐ次に述べるように，超流体に固有な渦糸が発生して流れが**乱流状態**に移行した結果である。このとき二流体は独立ではなくなり，新たな**相互摩擦**が発生して非線形性が現れる。これについては 7 章で議論する。

最後に二流体中を伝播する音波においても特徴がある。通常の流体を伝わる音波は，密度のゆらぎが圧力の勾配を回復力として空間を伝播するも

---

† ここでは $T = 1.5\mathrm{K}, \rho = 0.145\mathrm{g/cm^3}$, $\sigma = 0.196\mathrm{J/g{\cdot}K}$, $\eta_{\mathrm{n}} = 1.41\times10^{-5}\mathrm{P}$ (ポワズ) を用いた。熱伝導係数 κ の測定は，このような熱対流の存在のため困難であるが，後で述べる第二音波の減衰率から推定された値は，$\kappa \le 3\times10^{-3}\mathrm{J/cm{\cdot}s{\cdot}K}$ である。上記の評価はこれを用いた。なお，^{3}He の超流動相でもこの熱対流が考えられる。しかし ^{4}He に比較して温度が 3 桁小さく (転移温度が数 mK)，η_{n} が 4 ∼ 5 桁大きいことを考慮すると，(2.17) から ^{4}He とは違って大きな熱輸送は期待できない。

のである。一方，エントロピーのゆらぎは熱伝導による拡散となり，波動としては伝播はしない。超流動液体ヘリウムでは事情が異なる。密度のゆらぎである通常の音波はもちろん存在して**第一音波**とよぶ。一方でエントロピーのゆらぎは温度の勾配を回復力として空間を伝播することができ，**第二音波**とよぶ。エントロピー波は密度を一定に保ったまま，したがって先の内部対流と同じように $\boldsymbol{v}_{\mathrm{n}}$ と $\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}$ が反対位相で振動するもので，やはり二流体の特性である。液体ヘリウムではさらに，第三，第四，第五とよばれる音波も存在し，これらの流体力学的波動については 5–4 節で述べる。

2–7 渦の特性

液体ヘリウムの流れにも古典流体と同様に渦が存在できるが，超流動速度場 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}$ のもつ特性に基因して，**渦が量子化**されるという特徴がある。超流動速度場は，そもそも超流動相の実体がどのようなものかに関係する。3 章で議論するように，これは量子的波動関数の性質をもつ秩序変数により特徴づけられる。超流動速度場はこの波動関数の位相の勾配に比例する量として与えられる ((3.40))。そのため流体内部にとった経路上での速度の一周線積分で与えられる循環の値が，$\kappa = h/m$ で与えられる量の整数倍に限られることが要求される。ここで h, m は Planck 定数とヘリウム原子の質量である。このような渦の量子化は，多重連結領域の超流動速度場，例えば 2–2 節で述べたトーラス容器中の巨視的な回転流の速度が量子化されるという結果に導く。また円筒容器を軸のまわりに回転させたとき，流体内部に生成される渦は微視的なサイズの芯をもつ渦糸として実現し，そのまわりの流れにおいても量子化された循環が実際に観測されている。またこのような渦糸が細いパイプ中の流れに発生すると，その循環を維持したまま複雑に絡み合った超流動特有の乱流状態が実現される。

古典流体では粘性のため，任意の小さな循環の渦の生成が可能であり，それによる新たな流れの減衰が起き得る。渦の循環が有限な値に量子化されている超流動では，ある臨界速度に達するまでは，渦を生成できず半永久流とし安定な流れが持続される。一方，超流動速度が臨界速度を越えると，渦糸あるいは渦環を生成して流れの減衰が起きる。このように渦は超流動の安定性と密接に関係しており，古くから実験的にも注目され，多くの研究が現在まで続いている[5)]。渦については後の 3, 6, 7, 8 章で議論する。

3. Bose-Einstein 凝縮と秩序変数

ヘリウム原子 (^{4}He) の集団は Bose 統計に従う。液体ヘリウムの λ 転移は，この系が T_λ 以下の温度で Bose-Einstein 凝縮を起こすことによるものである。始めに相互作用のない理想 Bose 系の統計力学で知られた Bose-Einstein 凝縮 (以下 B-E 凝縮と書く) を復習する。実際の液体ヘリウムでは 1 章でみたように原子間には相互作用があるが，そのときにも B-E 凝縮が実現しているとみられ，超流動相への相転移が起きる。一般に相転移が起きると低温側で実現する相には長距離にわたり相関が生じ，系に特有な秩序が現れるので，その相を秩序相とよぶ。そしてその相を特徴づける新たな巨視的物理量——有限温度では熱力学的変数となる——として秩序変数 (order parameter) を導入する。超流動相の 秩序変数をどのような形に選ぶのが適当か，それにより超流動の基本的な性質がどのように記述できるかを議論するのがこの章の目的である。さらにその秩序変数が波動関数の性格を持つことから，超流体中に実現する渦流が量子化されるという事実と，その実験的検証について述べる。

3–1 理想 Bose 系

体積 Vの中に Bose 粒子 N個が閉じ込められているとする。相互作用がない理想系では，系全体の波動関数は一粒子波動関数 ϕ の積を用いて，

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_N) = S \prod_{i=1}^{N} \phi_{\boldsymbol{p}_i}(\boldsymbol{x}_i) \tag{3.1}$$

と表される。ここで記号 S は N個の ϕ の積を対称化する演算で，具体的

には粒子の座標 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_N$ についてすべての可能な交換により作られた波動関数の和をとったものである。これは Bose 統計に従う同種粒子系の波動関数が粒子の座標の任意の入れ換えに対し不変であるという性質を表したものである。一粒子波動関数 $\phi_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})$ は，自由粒子の一粒子ハミルトニアン，$\widehat{H}_0 = \widehat{\boldsymbol{p}}^2/2m$ †の固有方程式の解である；

$$\widehat{H}_0\, \phi_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x}) = \varepsilon_{\boldsymbol{p}}\, \phi_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x}), \qquad \varepsilon_{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{p}^2/2m.$$

同種粒子系の量子統計 (今の場合 Bose 統計) を扱うのには，粒子数表示を用いるのが便利である††。まず次の交換関係

$$\begin{aligned} &[a_{\boldsymbol{p}},\, a^+_{\boldsymbol{p}'}] = \delta_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'} \\ &[a_{\boldsymbol{p}},\, a_{\boldsymbol{p}'}] = 0 \\ &[a^+_{\boldsymbol{p}},\, a^+_{\boldsymbol{p}'}] = 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

を満たす互いにエルミートな演算子，$a_{\boldsymbol{p}}, a^+_{\boldsymbol{p}}$ を導入する。前者は運動量 $\boldsymbol{p}$ の粒子を 1 個減らす作用を，後者は 1 個増やす作用をするものでそれぞれ消滅演算子，生成演算子とよばれる。粒子数を表す演算子を $\widehat{n}_{\boldsymbol{p}} = a^+_{\boldsymbol{p}} a_{\boldsymbol{p}}$ と定義すると，その固有値が整数 $n_{\boldsymbol{p}} = 0, 1, 2, \cdots$ となることを示すことができ，Bose 統計の特徴が現れる。粒子数 $n_{\boldsymbol{p}}$ の固有状態を Dirac の記号を用いて $|n_{\boldsymbol{p}}\rangle$ と書くと上記演算子の性質は関係式

$$\begin{aligned} &a_{\boldsymbol{p}}|n_{\boldsymbol{p}}\rangle = \sqrt{n}_{\boldsymbol{p}}\, |n_{\boldsymbol{p}} - 1\rangle \\ &a^+_{\boldsymbol{p}}|n_{\boldsymbol{p}}\rangle = \sqrt{n_{\boldsymbol{p}} + 1}\, |n_{\boldsymbol{p}} + 1\rangle \\ &\widehat{n}_{\boldsymbol{p}}|n_{\boldsymbol{p}}\rangle = n_{\boldsymbol{p}}\, |n_{\boldsymbol{p}}\rangle \end{aligned} \tag{3.3}$$

が成立することにより示される。

このように Bose 統計では一つのエネルギー準位を任意の個数の粒子が占拠できるので，$T = 0$ K での基底状態では全粒子が最低のエネルギー準位 ε_0 を占めることになり，いわゆる B-E 凝縮が起きる。このとき凝縮体の個数 N_0 は全粒子数に等しく，$N_0 = N$ となる。有限温度になると凝縮体からより高い $\varepsilon_{\boldsymbol{p}}$ の準位に熱的に励起される。熱平衡での運動量分布関数は $\widehat{n}_{\boldsymbol{p}}$ のグランド・カノニカル集合での統計平均を求めることにより次

† $\widehat{\boldsymbol{p}}$ は運動量の演算子を表す。今後，演算子を強調したいときにはこの記号を用いる。

†† 粒子の従う統計性と同種粒子系の扱いについては量子力学や統計力学のテキスト1),2)を参照されたい。

のような Bose 分布関数となる。

$$n_{\boldsymbol{p}} = \langle \widehat{n}_{\boldsymbol{p}} \rangle = \frac{\mathrm{Tr}\, \widehat{n}_{\boldsymbol{p}} \exp\left(-\beta(\widehat{H} - \mu\widehat{N})\right)}{\mathrm{Tr}\, \exp\left(-\beta(\widehat{H} - \mu\widehat{N})\right)} = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_{\boldsymbol{p}} - \mu)} - 1} \tag{3.4}$$

ここで，$\beta = 1/k_{\mathrm{B}}T$, μ は化学ポテンシャル (ここでは 2 章と違って 1 粒子当たりのエネルギーとしている) である。$n_{\boldsymbol{p}}$ は正の量であるから $\varepsilon_{\boldsymbol{p}} - \mu > 0$ であり，$\varepsilon_{\boldsymbol{p}}$ の最低値はゼロ ($\varepsilon_0 = 0$) であることを考慮すれば $\mu < 0$ でなければならない。すぐ後で見るように B-E 凝縮が起きている温度では μ はゼロとなる。$n_{\boldsymbol{p}}$ の総和は全粒子数の平均値 $\langle \widehat{N} \rangle = N$ となる。それを

$$N = \sum_{\boldsymbol{p}} n_{\boldsymbol{p}} = N_0 + N' \tag{3.5}$$

と書こう。N_0 は $\boldsymbol{p} = 0$ の最低状態 $\varepsilon_0 = 0$ を占める凝縮体の粒子数，N' は励起状態にある粒子数であり，それぞれ

$$N_0 = \frac{1}{e^{\alpha} - 1} \tag{3.6}$$

$$N' = \frac{V}{2\pi^2\hbar^3} \int_0^\infty dp \frac{p^2}{e^{(\alpha + \beta\varepsilon_{\boldsymbol{p}})} - 1} = \frac{V}{\lambda^3} F_{3/2}(\alpha) \tag{3.7}$$

と与えられる。ここで

$$\alpha = -\frac{\mu}{k_{\mathrm{B}}T}, \qquad \lambda = \left(\frac{2\pi\hbar^2}{mk_{\mathrm{B}}T}\right)^{1/2} \tag{3.8}$$

とおいた。また $F_{3/2}(\alpha)$ は

$$F_{3/2}(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}dx}{e^{x+\alpha} - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n\alpha}}{n^{3/2}}$$

で定義され，α の減少に対し単調に増加し $\alpha = 0$ で最大値 $F_{3/2}(0) = 2.612$ をとることが知られている。

十分高温ではほとんどすべての粒子が励起状態にあり，$N_0 = O(1), N' = N$ となり，温度が下がると λ は増加するので，この条件を満たすためには (3.7) から $F_{3/2}(\alpha)$ も増加する。したがって α そして $|\mu|$ は減少することがわかる。その極限として α または μ がゼロに達したとき，

$$\frac{V}{\lambda^3} F_{3/2}(0) = N \tag{3.9}$$

となる。(3.9) を満たす温度 T_Bは

$$T_B = \frac{2\pi\hbar^2}{mk_B}\left(\frac{N}{2.612\,V}\right)^{2/3} \tag{3.10}$$

で与えられる。(3.8) で定義された λ は熱的運動量 $\sim \sqrt{mk_BT}$ に対応する de Broglie 波長であるが，(3.9) は λ が粒子間の平均間隔 $(V/N)^{1/3}$と同程度になることを表している。これは粒子の波動性が $T \sim T_B$ の低温では重要になり量子効果の現れである。

T_B は全粒子が熱的に励起される最低の温度であり，逆に T_Bより下の温度では $N' = N$からは μ は定まらない。この温度領域では (3.5) に見るように，N_0の出現を考慮しなければならない。(3.6) は $\alpha \to 0$ で発散するから，実際には α はきわめてゼロに近く $\alpha \simeq O(1/N)$ ととることにより N_0 は巨視的な数となる。その値は温度に依存して，$N_0(T) = N - N'(T)$ から決まる。$N'(T)$ の表式 (3.7) では $\alpha = 0$ とおく近似で十分であり，それは (3.9)，(3.10) を考慮して $N'(T) = N(T/T_B)^{3/2}$と求まる。したがって

$$N_0(T) = N\left(1 - \left(\frac{T}{T_B}\right)^{3/2}\right), \qquad (T \leq T_B) \tag{3.11}$$

となる。このように T_B以下では最低状態を巨視的個数の粒子が占拠し，B-E 凝縮が起きる。これは運動量空間の最低状態への凝縮であり，T_B で圧縮率は発散し，また比熱もそこで異常な振舞いをする。理想 Bose 系の B-E 凝縮が一種の**相転移**であることを示している。

(3.10) に液体ヘリウムの粒子数密度 $N/V = 2.1 \times 10^{22}\mathrm{cm}^{-3}$と^{4}He の質量 $m = 6.6 \times 10^{-24}$g を代入すると，$T_B = 3.1$K となり，$T_\lambda = 2.17$K に近い値となることから，London は液体ヘリウムの相転移そして超流動がこの B-E 凝縮に起因するとの考えを最初に提示した。他方 Landau は実際の液体ヘリウムが理想気体であるというのは非現実的であるとし，相互作用を考慮した量子流体の理論を提唱した。以下の議論から明らかなように確かに原子間の相互作用が重要な役割を演じているが，このときにも B-E 凝縮が起きており，これが超流動相出現に本質的であることがわかる。その後の超流動理論の発展にとって二人の先駆者の発想が出発点となったわけである。

3–2 液体ヘリウムの B-E 凝縮と秩序変数[3),4)]

巨視的な系の多くでみられる相転移は一般に次のように特徴づけられる。系に特徴的な転移温度 T_cが存在し，それより高温側では熱的なみだれが系固有の相互作用よりも優勢になり (自由エネルギーのエントロピー項が優勢)，無秩序相が実現する。そして注目する物理量の空間的相関は短距離のみに存在する。一方，T_cより低温では熱的なみだれは減少し，**長距離相関**が生じて**秩序相**が実現する。そしてこの相を特徴づける熱力学的変数として**秩序変数**が新たに導入される。相転移は系固有の対称性が T_cの上下で変化した結果と見ることができる。系のハミルトニアンはそれぞれ固有の対称性を備えている。高温相ではこの対称性を持った状態が実現しているのに対し，低温相では対称性の低下した状態が実現した結果，秩序相が現れたと考えることができる。このことを T_c 以下で，**自発的な対称性の破れ** (spontaneous symmetry breaking) が起きたと称する。以上の特徴を，最初によく知られた磁性体の相転移について考えてみる。

スピン系の秩序変数　磁性体は互いに相互作用する巨視的な数のスピン集団で構成されている。三次元 Heisenberg モデルを例にとると，相互作用ハミルトニアンは $H = -J\sum_{i,j} \boldsymbol{S}_i \cdot \boldsymbol{S}_j$ で表される。格子点 i にあるスピン演算子 $\boldsymbol{S}_i$と最近接の格子点 j にあるスピン $\boldsymbol{S}_j$との交換相互作用 J による相互作用である。$J > 0$ であれば転移温度 T_c (Curie 温度) で常磁性相から強磁性相に転移する。高温側の常磁性相ではスピンの熱運動によるみだれにより，その向きはばらばらである。低温側では熱的みだれは減少し，他方上に述べた，互いのスピンの向きを揃えようとする強磁性的な相互作用が優勢になり強磁性相が実現する。そこではスピンの向きは一つの方向に揃い，長距離相関を伴った秩序相となる。このことを，場所 $\boldsymbol{r}$ でのスピン密度を表す演算子 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}) = V^{-1}\sum_i \boldsymbol{S}_i\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i)$ を用いて二点，$\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'$ の相関関数で書くと，

$$\langle \boldsymbol{S}(\boldsymbol{r})\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}')\rangle = \langle \boldsymbol{S}(\boldsymbol{r})\rangle\langle \boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}')\rangle + C(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \tag{3.12}$$

となる。ここで $\langle \quad \rangle$ は統計平均である。第二項の $C(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ は $|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'| \to \infty$ でゼロになり短距離相関を表す。第一項は長距離相関を表し，スピン密度の平均値 $\langle \boldsymbol{S}(\boldsymbol{r})\rangle$ が有限な値を持つことの結果である。これが強磁性相での**秩序変数**であり，自発磁化 $\langle \boldsymbol{M}\rangle$ はこれに比例する量として与えられる。

$T > T_c$での常磁性相では，第一項は消え高温相での短距離相関のみが残る。

Heisenberg モデルでのハミルトニアンは，先に見たようにスピン変数のスカラー積であるから，スピン空間での任意の軸のまわりの回転に対する対称性を持っている。自発磁化のない常磁性相はこの対称性を持った状態であるが，自発磁化がある方向に現れた強磁性相では，もはやこの対称性は失われている (自発磁化の方向を軸とする回転対称のみが残されているにすぎない)。この事情を T_c 以下では回転対称の破れた状態が実現した結果，秩序変数が有限な値をとるようになったと考えるわけである。ただ秩序変数を $\langle \boldsymbol{S}(\boldsymbol{r})\rangle$ と表したときの統計平均の意味については注意を要する。もし文字通り可能なすべての状態についての平均操作を施せば，$\boldsymbol{S}$ と $-\boldsymbol{S}$ が現れる確率は等しいために平均値 $\langle \boldsymbol{S}(\boldsymbol{r})\rangle$ はゼロとなってしまう。強磁性相で観測される有限な $\langle \boldsymbol{S}(\boldsymbol{r})\rangle$ を与えるためには，回転対称の破れた状態での平均に限定すること，つまり制限された統計集団 (restricted ensemble) を用いることが必要である。これを実行する数学的手段として，準平均 (quasi average) とよばれる方法がある。これは外部磁場 $\boldsymbol{h}$ をかけてその方向に磁化を揃える。その際，系の体積 V と N を無限大にとる (熱力学的極限をとる) ことにより，破れた状態での平均を確定した後で $\boldsymbol{h}$ をゼロにする。このとき自発磁化はスピン演算子に比例する磁気モーメント演算子 $\boldsymbol{M}$ に対し，

$$\langle \boldsymbol{M}\rangle = \lim_{h\to 0}\lim_{V\to\infty} \frac{\mathrm{Tr}\left[\boldsymbol{M}e^{-\beta(H-\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{M})}\right]}{\mathrm{Tr}\left[e^{-\beta(H-\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{M})}\right]}$$

で与えられる。

Bose 凝縮系の秩序変数[3),5)]　そこで本題である相互作用のある Bose 系での相転移を，理想系での B-E 凝縮を一般化した形で考える。磁性体の相転移とは少し趣を異にする側面があるが，やはり相関関数を導入する。$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r})$ に相当する物理量として，Bose 粒子系を場とみなすことにより Bose 波動場を量子化した演算子，$\psi(\boldsymbol{r}), \psi^+(\boldsymbol{r})$ を導入する。それは先に用いた運動量空間での演算子，$a_{\boldsymbol{p}}, a_{\boldsymbol{p}}^+$ の Fourier 変換，

$$\psi(\boldsymbol{r}) = V^{-1/2}\sum_{\boldsymbol{p}} e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}} a_{\boldsymbol{p}} \tag{3.13}$$

$$\psi^+(\boldsymbol{r}) = V^{-1/2}\sum_{\boldsymbol{p}} e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}} a_{\boldsymbol{p}}^+ \tag{3.14}$$

で定義される (ここでは便宜上 $\hbar = 1$ とした)。これらは場所 $\boldsymbol{r}$ での粒子の消滅演算子，生成演算子を表し，(3.2) から

$$
\begin{aligned}
[\psi(\boldsymbol{r}),\, \psi^+(\boldsymbol{r}')] &= \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \\
[\psi(\boldsymbol{r}),\, \psi(\boldsymbol{r}')] &= 0 \\
[\psi^+(\boldsymbol{r}),\, \psi^+(\boldsymbol{r}')] &= 0
\end{aligned} \tag{3.15}
$$

の交換関係を満たす。粒子数密度の演算子は $\widehat{\rho}(\boldsymbol{r}) = \psi^+(\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r})$ と書ける。したがってその平均値 $\langle\widehat{\rho}(\boldsymbol{r})\rangle = \rho(\boldsymbol{r})$ を用いて (3.5) の条件は

$$N = \int \rho(\boldsymbol{r})\, d\boldsymbol{r} \tag{3.16}$$

となる。$\rho(\boldsymbol{r})$ を拡張して一粒子密度行列とよばれる，二点 $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'$ での相関関数

$$\rho_1(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \langle\psi^+(\boldsymbol{r}')\psi(\boldsymbol{r})\rangle \tag{3.17}$$

を導入すると，(3.12) との類推から B-E 凝縮が起きているときには，

$$\rho_1(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \langle\psi^+(\boldsymbol{r}')\rangle\langle\psi(\boldsymbol{r})\rangle + C(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \tag{3.18}$$

となることが期待できる。そして B-E 凝縮相を特徴づける**秩序変数**としては $\langle\psi(\boldsymbol{r})\rangle$ を採用する。(3.18) の第一項は長距離相関の結果を表したものでこのとき ODLRO (off diagonal long range order) が存在するという。それは，

$$\langle\psi(\boldsymbol{r})\rangle = \varPsi(\boldsymbol{r}), \qquad \langle\psi^+(\boldsymbol{r})\rangle = \varPsi^*(\boldsymbol{r}) \tag{3.19}$$

とおくと，第一項は $\varPsi^*(\boldsymbol{r}')\varPsi(\boldsymbol{r})$ のように非対角な形をとるためである。このように定義された秩序変数は “波動関数” の性質をそなえている。(3.18) の第二項は (3.12) のそれと同様に短距離相関項である。

(3.18)，(3.19) の意味を具体的に考えるため，もう一度理想 Bose 系をとりあげる。一様な系では $\rho_1(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ は $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$ の関数となる。実際理想 Bose 系では (3.13)，(3.14) そして (3.4)，(3.5) に注意すれば

$$
\begin{aligned}
\rho_1(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') &= V^{-1}\sum_{\boldsymbol{p}} n_{\boldsymbol{p}}\, e^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')} \\
&= \frac{N_0}{V} + \frac{1}{2\pi^2\hbar^3}\int_0^\infty dp \frac{e^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}\, p^2}{e^{\beta\varepsilon_{\boldsymbol{p}}}-1}
\end{aligned} \tag{3.20}
$$

となる。ここでは B-E 凝縮のため $\mu = 0$ とした。これから理想 Bose 系での $\varPsi$ は，凝縮体の一粒子波動関数 $\phi_0 = e^{i\varphi}/\sqrt{V}$ (φ は位相定数) を用いて

$$\varPsi(\boldsymbol{r}) = \sqrt{N_0}\phi_0 = \sqrt{n_0}\, e^{i\varphi} \tag{3.21}$$

ととればよいことがわかる。ここで $n_0 = N_0/V$ は凝縮体の密度である。(3.20) の第二項は計算によると，de Broglie 波長 λ (3.8) 程度離れるとゼロ

になり，確かに短距離相関項を表している。

現実の液体ヘリウムは理想 Bose 系ではないが，やはり B-E 凝縮が起きると考えられる。したがってこのときにも一粒子状態で見たとき，$\boldsymbol{p}=0$ を占拠する凝縮体の個数 N_0 は巨視的な数にとどまるであろう。ただ粒子間に斥力が働くため，$T=0$ でも $\boldsymbol{p}\neq 0$ の状態を占める粒子が存在するようになる。したがってすべての粒子が最低状態を占めることはできず，N_0 は N よりは小さくなる。その数は (3.18)，(3.20) の議論から推測できるように

$$\frac{N_0}{V}=\lim_{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\to\infty}\rho_1(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{3.22}$$

で与えられる[5)]。実際の理論的評価については次章で述べるが，N_0 はおよそ N の 10% 程度とされており，実験的にもこれに近い値が得られている。これについては 4–3 節で触れる。ところでこのときの秩序変数は，粒子密度と位相が空間的に緩やかに変わることを許して $n_0(\boldsymbol{r}),\varphi(\boldsymbol{r})$ とすると，(3.21) は拡張されて

$$\Psi(\boldsymbol{r})=\sqrt{n_0(\boldsymbol{r})}\,e^{i\varphi(\boldsymbol{r})} \tag{3.23}$$

となる。さらに時間的にも緩やかに変動することを許すと，$\Psi(\boldsymbol{r},t)$ は凝縮体の力学的変数とみなすことができる。

Bose 系でのコヒーレント状態と対称性の破れ　ここで (3.19) の統計平均の意味，それに関連して Bose 系での対称性の破れについて考えておく。

磁性体のところで述べたように，(3.19) での平均を文字通りにとるとその値はゼロとなってしまう。エネルギー E，粒子数 N が一定の状態 $|E,N\rangle$ を考えると，$\psi(\boldsymbol{r})$ は 1 個の粒子を消滅する演算子であるから，平均値 $\langle N,E|\psi(\boldsymbol{r})|E,N\rangle$ はゼロである。したがって，$\langle\psi(\boldsymbol{r})\rangle$ が秩序変数として有限な値をもつためには，この平均値の意味を改めて考え直す必要がある。ここでは，対称性の破れている Bose 凝縮系においては，次に述べるコヒーレント (coherent) 状態が実現しており，そこでの $\langle\psi(\boldsymbol{r})\rangle$ を考えることにする。

コヒーレント状態というのは，最初，光子の集団である質量ゼロの Bose 粒子系を表す一つの量子力学的状態として提唱されたものである[6)]。この状態は 1 つのモードの光子の粒子数 n の固有状態 $|n\rangle$((3.3) で用いた) を適当に重ね合わせ，消滅演算子 $\hat{a}$ の固有状態を構成したものである。その固有値は複素数となるが，それを表す 2 つの実数を，電磁波の位相と振幅に

選ぶことができる。もし単一振動数のモードを巨視的な光子が占拠 (Bose 凝縮) したとすると，コヒーレント状態は振幅と位相が同時に定まった古典的な電磁波，例えば電波やレーザーを表すことができる。

液体ヘリウムの Bose 系は静止質量を持つ物質波であるが，凝縮のあるときは前述のコヒーレント状態に似た事情が起きていると考えられる。凝縮体の個数 N_0が巨視的なとき，その平均粒子数 N_0のまわりにゆらぎ ν を幅 $2\Delta N_0$の範囲で考える。このときコヒーレント状態[7)]は粒子数の固有状態 $|N_0+\nu\rangle$ を一定の位相 φ で重ね合わせ，

$$|N_0,\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\Delta N_0+1}} \sum_{\nu=-\Delta N_0}^{\Delta N_0} e^{i\varphi\nu}|N_0+\nu\rangle \qquad (3.24)$$

と与えられる。このとき秩序変数は

$$\begin{aligned}&\langle N_0,\varphi|\psi(\boldsymbol{r})|N_0,\varphi\rangle \\ &\quad = \frac{1}{2\Delta N_0+1}\, e^{i\varphi} \sum_{\nu} \langle N_0+\nu-1|\psi(\boldsymbol{r})|N_0+\nu\rangle \end{aligned} \qquad (3.25)$$

となる。$\boldsymbol{p}=0$ の状態に N_0個の粒子が凝縮している場合，上式は

$$\langle N_0,\varphi\,|\psi(\boldsymbol{r})|\,N_0,\varphi\rangle \simeq \sqrt{n_0}\, e^{i\varphi} \qquad (3.26)$$

が得られる。ここで (3.3) を用い，さらに $N_0 \gg \nu$を考慮した。

ところで Bose 粒子系で問題となる対称性はゲージ (guage) 変換に対する不変性である。変換の演算子は，位相変数 (スカラー量) φ と粒子数演算子 $\widehat{N}$を用いて $U_\varphi = \exp(i\varphi)\,\widehat{N}$と表される。$[\widehat{N},\widehat{H}]=0$ であるから，変換によりハミルトニアン $\widehat{H}$は不変であり，$U_\varphi^\dagger \widehat{H} U_\varphi = \widehat{H}$ となる。このとき基底状態 $|E\rangle$ が変換 U_φで移る状態，$U_\varphi|E\rangle = |E,\varphi\rangle$ は連続パラメーター φ の値に応じて無数にあるが，それらはすべて縮退している。巨視的系において対称性が破れるとき，これらの状態の中からある一つの φ に対応した状態が，ハミルトニアンの対称性を持たない状態として物理的に実現し，そこでは秩序変数が有限な値を持つようになったと考える。コヒーレント状態 (3.24) は，このゲージ対称性の破れた状態を定性的に表した一つの例と考えられる。φ の異なる値で指定された状態は互いに独立な状態とみなすことができる†(脚注次頁)。

このことは以下の議論からも理解できる。一般に粒子数 Nと位相 φ は正準共役な量で，それらの間には不確定性，$\Delta N \Delta\varphi \gtrsim 1$ が成り立つ。巨視的系では$\Delta N \simeq \sqrt{N}$となること，そして $N \gg \sqrt{N} \gg 1$ を考慮すれば，

$\Delta\varphi \simeq N^{-1/2}$となり，$\varphi$ の不確定さは無視できる。したがって Nと φ は同時に決まった値をとることが許され，先の電磁波で見たように古典的な波動と考えることができる。この意味で (3.23) の秩序変数 $\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{r})$ は巨視的波動関数ともよばれる。1 つの状態に巨視的個数の粒子が凝縮した結果，粒子間の相関が長距離にわたって保たれたコヒーレントな状態を特徴づけるのが $\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{r})$ である。そしてその位相 φ が空間的に緩やかに変化しているとき，巨視的個数の粒子が同じ速度で一斉に動く超流動流が可能になることは後述する ((3.40)，(3.41) を参照)。

有限温度での統計平均 $\langle\psi(\boldsymbol{r})\rangle$ も，単純なグランド・カノニカル分布に代わり制限された統計演算子による平均と考える。それは凝縮体の存在を反映して，先のコヒーレント状態への射影演算子を含む形が期待されるが，ここでは磁性体のときと同様に準平均の方法を述べておく。それは外場 η, η^* を含む統計演算子 $\widehat{\rho}_\eta$ を用いて次のように与えられる；

$$\widehat{\rho}_\eta = \exp\left[-\beta\left(\widehat{H} - \mu\widehat{N} - \int[\eta^*(\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r}) + \eta(\boldsymbol{r})\psi^+(\boldsymbol{r})]d\boldsymbol{r}\right)\right] \tag{3.27}$$

$$\langle\psi(\boldsymbol{r})\rangle = \lim_{\eta\to 0}\lim_{V\to\infty}\frac{\mathrm{Tr}\,\widehat{\rho}_\eta\psi(\boldsymbol{r})}{\mathrm{Tr}\,\widehat{\rho}_\eta} \tag{3.28}$$

ただ η, η^*のような外場は物理的には存在せず，仮想的なものである。

3–3 秩序変数の力学

前節までは熱平衡状態での秩序変数を考えてきたが，超流動を考える上でその動的振舞いを知ることが必要となる。その目的のために演算子 $\psi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{t})$ の量子力学的運動方程式から出発しよう。ここでも系のハミルトニアンとして熱浴と粒子をやりとりできる場合を考えて

† この事情を見るためには 2 つの状態のスカラー積を調べればよい。(3.24) を用いた場合

$$\langle N_0, \varphi'|N_0, \varphi\rangle = (2\Delta N_0 + 1)^{-1}\sum_{\nu=-\Delta N_0}^{\Delta N_0}\exp i(\varphi - \varphi')\nu \simeq \delta_{\varphi,\varphi'}$$

となる。ここで最後の Kronecker δ は，$\Delta N_0 \simeq \sqrt{N_0} \sim \infty$ の近似により得られた。したがって 2 つの状態は直交しているとみなされる。

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \widehat{H} - \mu\widehat{N} \\ &= -\int d\boldsymbol{r}\psi^+(\boldsymbol{r})\left(\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+\mu\right)\psi(\boldsymbol{r}) \\ &\quad + \iint d\boldsymbol{r}'\,d\boldsymbol{r}\,\psi^+(\boldsymbol{r})\,\psi^+(\boldsymbol{r}')V(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,\psi(\boldsymbol{r}')\,\psi(\boldsymbol{r})\end{aligned} \tag{3.29}$$

ととる。取扱いを簡単にするため，以下では原子間の斥力のみを考え，しかも原子の大きさを無視して $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'$ のときにのみ働く相互作用 (contact potential)

$$V(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = g\,\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{3.30}$$

の近似をとるが，液体ヘリウムの定性的な性質を見るには十分である。ここで g は正の定数とする。このとき Heisenberg の運動方程式は (3.29) を用いて

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial\psi(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} &= [\mathcal{H},\psi(\boldsymbol{r},t)] \\ &= -\left(\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+\mu\right)\psi + g\psi^+\psi\psi\end{aligned} \tag{3.31}$$

となる。ここで B-E 凝縮の存在を考慮して，ψ を秩序変数 (3.19) とそのまわりのゆらぎを表す演算子 $\widetilde{\psi}$ の和

$$\psi = \Psi + \widetilde{\psi} \tag{3.32}$$

と書けば，$\langle\widetilde{\psi}\rangle = 0$ である。ここでは Ψ の緩やかな時間変動も考える。以下では $\widetilde{\psi}$ のとる値は Ψに比べて十分小さいと考えそれの寄与は無視する。そのとき (3.31) は凝縮体の運動方程式

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\left(\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+\mu\right)\Psi + g|\Psi|^2\Psi \tag{3.33}$$

となる。この式は Gross-Pitaevskii[8),9)] の運動方程式とよばれる。上式に (3.23) の Ψ を代入して実数部と虚数部に分けて書くと，

$$\frac{\partial\sqrt{n_0}}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2m}(2\nabla\sqrt{n_0}\,\nabla\varphi + \nabla^2\varphi) \tag{3.34}$$

$$\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left((\nabla\varphi)^2 - \frac{\nabla^2\sqrt{n_0}}{\sqrt{n_0}}\right) + \mu - g\,n_0 \tag{3.35}$$

となる。もし系が平衡状態にあるとすれば，秩序変数は空間的，時間的に一定であり，このとき (3.35) から，化学ポテンシャルの平衡値は凝縮体密度の平衡値 n_0 を用いて $\mu = g\,n_0$ と与えられる。以下では上の 2 つの式

に基づき，秩序変数が超流動相で果たすより具体的な意味を考えることにする。

まず φ は一定であるとして，(3.35) から Ψ の空間的変化を調べる。$n_0(\boldsymbol{r})$ の一次元的変化に注目して，$\sqrt{n_0(x)} = \sqrt{n_0}\, f(x)$ と置き換える。そして上の化学ポテンシャルの平衡値を用いて，$\mu - g\, n_0(x) = g n_0(1 - f^2(x))$ の関係を考慮すれば，(3.35) は

$$\xi^2 \frac{d^2 f}{dx^2} + f - f^3 = 0 \tag{3.36}$$

と変形される。ここで

$$\xi = \frac{\hbar}{\sqrt{2mgn_0}} \tag{3.37}$$

とおいた。例えば $\Psi(x)$ が容器の壁ではゼロとし，そこから離れたときの振舞いを調べる目的で，境界条件 $x \to 0$ で $f(x) = 0$，$x \to \infty$ で $f(x) = 1$ を課すと (3.36) の解は容易に求まり，

$$\sqrt{n_0(x)} = \sqrt{n_0}\ \tanh\left(\frac{x}{\sqrt{2}\xi}\right) \tag{3.38}$$

となる。この解は $x \gtrsim \xi$ で秩序変数の振幅 $|\Psi(x)| = \sqrt{n_0(x)}$ が平衡値 $\sqrt{n_0}$ に戻ることから，ξ は**回復長** (healing length) とよばれる。

次に時間的，空間的に緩やかな秩序変数 $\Psi(\boldsymbol{r}, t)$ の運動を考察する。まず (3.34) は次のように変形される；

$$\frac{\partial n_0}{\partial t} = -\nabla \cdot (n_0\, \boldsymbol{v}_{\rm s}) \tag{3.39}$$

ここで，速度場 $\boldsymbol{v}_{\rm s}$を

$$\boldsymbol{v}_{\rm s} = \frac{\hbar}{m} \nabla \varphi \tag{3.40}$$

と定義した。量子力学によると凝縮体が運ぶ運動量密度 $\boldsymbol{j}_{\rm c}$は (3.23)，(3.40) を考慮すれば

$$\boldsymbol{j}_{\rm c} = \frac{\hbar}{2i}(\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) = m n_0 \boldsymbol{v}_{\rm s} \tag{3.41}$$

と表されることから，$\boldsymbol{v}_{\rm s}$を**超流動速度**と解釈することができる。(3.39) は凝縮体密度に対する連続の式である。次に (3.35) において凝縮体の変化は十分緩やかで右辺第二項は gn_0に比べて無視できるとしよう†(脚注次頁)。(3.35) の両辺の ∇ をとると

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}}{\partial t} = -\nabla\left(\frac{\mu(\boldsymbol{r},t)}{m} + \frac{\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}^2}{2}\right) \tag{3.42}$$

を得る。ここで，$\mu(\boldsymbol{r},t) = gn_0(\boldsymbol{r},t) - \mu$ とおいた。(3.42) は 2 章で流体力学的観点から導いた (2.8) と同じものである (ここで μ は粒子 1 個当たりの化学ポテンシャルであることに注意)。この式は加速方程式とよばれることもあり，以下超流動の議論において最も基本的な役割を担うものである。

3–4 渦の量子化

超流動速度は秩序変数の位相の勾配として表されることを (3.40) でみたが，これは流体力学で言うところのポテンシャル流 (速度ポテンシャル $= (\hbar/m)\varphi$) で，この速度場は渦なし

$$\nabla \times \boldsymbol{v}_{\mathrm{s}} = 0 \tag{3.43}$$

である。したがって，流体が単連結領域にあるときには，速度場 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}$のある閉じた経路に沿った一周線積分 (循環) はゼロである。しかし流体が多重連結の領域にあるとき，例えば，2–2 節で考察したトーラス容器中の流れや，流体中に針金が 1 本通っているとき，またはすぐ後で述べるように渦糸がある場合には，渦流が存在してよい。この場合波動関数の性質をもつ秩序変数は一価関数であり，そのためには位相 φ が 2πの整数倍に限られることを考慮すると循環は，

$$\oint \boldsymbol{v}_{\mathrm{s}} \cdot d\boldsymbol{s} = \frac{\hbar}{m}\oint \nabla\varphi \cdot d\boldsymbol{s} = \frac{\hbar}{m}2\pi n = \kappa n \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{3.44}$$

と表される。ここで，

$$\kappa = h/m = 0.998 \times 10^{-3}\mathrm{cm}^2/\mathrm{s} \tag{3.45}$$

である。最後の数値は m として^{4}He の質量を用いたものである。(3.44) は $\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}$の循環が κ を単位として**量子化**されていることを表しており，次節でみるように実験的にも検証されている。超流体に生ずる渦のこの際だった特性を最初に指摘したのは L.Onsager[10)]である。

トーラス容器中の超流動渦流　2–2 節で考察したトーラス容器中の回転流で，もし超流動成分が流れているとすると，(3.44) の一周線積分は $\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}$

† これは条件 $1 \gg \xi^2\,\nabla^2\sqrt{n}_0/\sqrt{n}_0$として表されるから ξ 程度の距離での $n_0(\boldsymbol{r})$ の変化を無視することに相当する。

の大きさを一定とすれば $2\pi R v_s$ となり，その結果

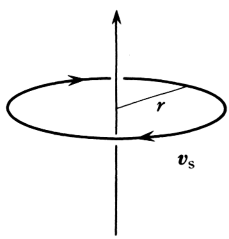
$$v_s = \frac{\kappa}{2\pi R} n \tag{3.46}$$

のように，$\boldsymbol{v}_s$ が量子化される。典型的な速度として $\boldsymbol{v}_s \simeq 1\text{cm/s}$ の場合，$R = 1\text{cm}$ とすれば n は $2\pi \times 10^3$ に近い整数となる。この量子化のため，いったんある n の値の $\boldsymbol{v}_s$ が生じると，ある条件の下ではこの $\boldsymbol{v}_s$ の準安定状態が維持され，超流動流 (永久流) が実現することになる。これについては 5 章と 6 章で詳しく議論する。

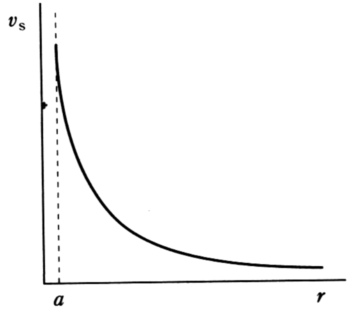
渦　糸[11)]　　流体力学で知られているように，1 本の曲線上に渦度 (vorticity) が集中しているのが渦糸である。渦度は，$\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{r}) = \nabla \times \boldsymbol{v}_s$ により定義されるから，$\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{r}) = 0$ を満たす。したがって湧き出しも吸い込みもなく，渦糸は途中で切れることはなく，それ自身で閉じるか，その端が系の境界 (例えば容器の壁) で終わるかのいずれかである。渦度 $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{r})$ のつくる速度場 $\boldsymbol{v}_s(\boldsymbol{r})$ は，導線上に電流密度 $\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r})$ が流れているとき，Biot-Savart の法則により与えられる磁束密度 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ に対応している。7 章で見るように，液体ヘリウムを入れた円筒容器を軸のまわりに回転させると，軸に平行に直線状の渦糸が発生する。1 本の十分長い直線状の渦糸が z 軸上にあるときの超流動速度は，円柱座標 (r, θ, z) を用いて

$$\boldsymbol{v}_s = \frac{\kappa}{2\pi r} n\, \boldsymbol{e}_\theta \tag{3.47}$$

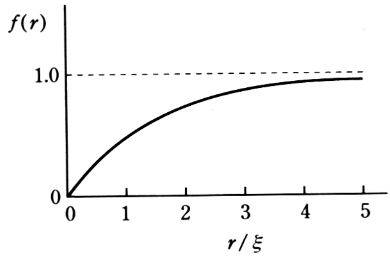
と与えられる。$\boldsymbol{e}_\theta$ は円周に沿った単位ベクトルである (3·1(a),(b) 図)。(3.47) は渦度が集中している $r = 0$ を除いてポテンシャル流である。渦糸は文字通り特異線であり $r = 0$ で $\boldsymbol{v}_s$ は発散する。しかし物理的には $r = 0$ の近くでは流体がある構造を持ち，渦糸の芯 (core) とよばれる有限の領域



3·1 (a) 図　渦糸のまわりの速度場 $v_s(r)$



3·1 (b) 図 渦流 v_s の r 依存性



3·1 (c) 図 渦糸の芯近傍での凝縮体密度の変化

が存在していると考えられる。液体ヘリウムに生ずる渦糸にも微視的な大きさの芯があることは確かであるが，その構造の詳細についてはわかっていない。

ここでは渦糸が存在するときの芯の様子を定性的に理解する目的で，渦糸の中心近くでの凝縮体の構造変化を Gross-Pitaevskii の式により考察しておく[9]。それには時間的に定常な (3.33) を用いる。渦流 (3.47) を考慮して

$$\Psi(r,\theta) = \sqrt{n_0} f(r) e^{in\theta}$$

とおく。ここで n は整数，n_0 は渦糸から十分離れたところでの平衡値である。(3.37) の回復長 ξ でスケールした変数 $x = r/\xi$ を用いると，(3.33) は

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial x} - n^2 \frac{f}{x^2} + f - f^3 = 0 \tag{3.48}$$

となる。境界条件として，芯の中心では秩序変数はゼロとなり渦糸から十分離れたところでは平衡値をとるとしよう。これは $x \to 0$ で $f(x) = 0$, $x \to \infty$ で $f(x) = 1$ を要求することで，これを満たす $f(r)$ は各々の極限で，

$$f = x^n \quad : \quad x \to 0$$

$$f^2 = 1 - \frac{n^2}{x^2} \quad : \quad x \to \infty$$

と与えられる。これらをつなぐ $f(x)$ は数値的に求められており，$n = 1$ の場合が 3·1(c) 図に示される。(3.48) は流れが渦糸に垂直な二次元面にあり，遠心力を表す項 (第 3 項) を含むが，(3.36) の解 (3.38) に似て，$r \gtrsim \xi$ となると $n_0(r)$ は平衡値に回復する。渦糸は凝縮体の中に生じる位相的欠陥

(topological defect) の一つとみなすことができる†。以上の議論では，渦糸は凝縮体に生じるものと考えてきたが，実際の液体ヘリウムに実現する渦糸は凝縮体そのものにではなくて質量密度 ρ_sの超流体の中につくられる。凝縮体が超流動速度 $\boldsymbol{v}_s$で動くとき，粒子間の相関により凝縮体以外の粒子もこの流れに参加し全体として超流動に寄与する質量密度が ρ_s である。以後渦糸は超流体の中につくられる位相的欠陥として議論する。

渦糸に伴うエネルギーは渦流により生じる超流体の運動エネルギーの増加分として与えられる††。いま超流体が半径 R の円柱容器に入っており，その中心軸に 1 本の渦糸があるとすると，その単位長さ当たりのエネルギーは (3.47) を用いて

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\rho_s \int_a^R {v_s}^2(r) 2\pi r dr = \frac{\rho_s (n\kappa)^2}{4\pi} \log \frac{R}{a} \tag{3.49}$$

となる。上式の積分は $r=0$ で発散するが，そこでは先の議論から明らかなように芯では ρ_sがゼロになるので，芯の太さ，半径 a でカットするのが物理的である。a は上の議論から ξ 程度の大きさにとればよいであろう。液体ヘリウムでの実際の ξ の大きさは正確にはわかっていないが，およその見積りは以下のように得られる。(3.37) に含まれるパラメーター gn_0 を $gn_0/m = c^2$ により音速の実測値 $c \simeq 240$ m/s に置き換えると (4–2 節参照)，$\xi = \hbar/\sqrt{2}mc \simeq 0.5$Å となる。このように渦糸の芯は微視的なサイズとなるが，これは次節に述べる渦環の実験事実とも整合している。

渦糸のエネルギー (3.49) は量子数 n の 2 乗に比例していることから，$n=2$ の渦糸を 1 本つくるより $n=1$ の渦糸を 2 本つくるほうがエネルギーは少なくてすむ。したがって通常の実験で生じる安定な渦糸は $n=1$ と考えてよい。

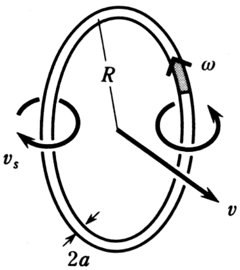
渦環 (vortex ring)[11]　渦環は渦糸が環状に閉じたもので，よく知られているように環の各部分のまわりにつくられた渦流が環の他の部分の上に影響を及ぼし，自己誘導速度 v で環に垂直な方向に運動する (3·2 図)。半径 R の渦環のエネルギー E と v は流体力学により

$$E = \frac{1}{2}\rho_s \kappa^2 R \left(\log \frac{8R}{a} - \frac{7}{4}\right) \tag{3.50}$$

---

† なじみ深い位相的欠陥として，固体中に生じる転位 (dislocation) がある。

†† 実際には芯の存在によるコア・エネルギー (core energy) もある (8 章での議論を参照)。



3·2図　半径 R, 芯幅 $2a$ の渦環。
渦度 ω のまわりの速度場 v_s と自己誘導速度 v.

$$v = \frac{\kappa}{4\pi R}\left(\log\frac{8R}{a} - \frac{1}{4}\right) \tag{3.51}$$

と与えられる†。また渦環はインパルス (impulse)

$$P = \pi\rho_s\kappa R^2 \tag{3.52}$$

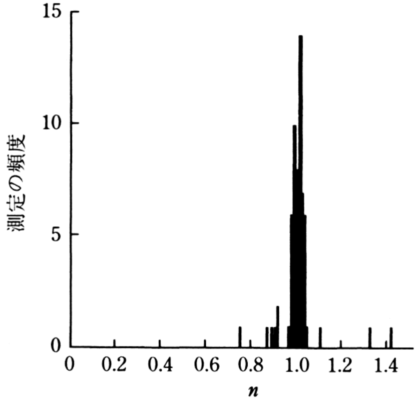
を持つ。これは通常の意味の運動量ではなく，渦環の生成により流体全体がもつ運動量に相当する。液体ヘリウム中での渦環の実験については次節で述べる。

3–5　渦の実験的検証

循環量子化の実験的検証　超流動速度の循環が量子化されていることを実証し，その量子単位である κ の値の測定を最初に実施したのは W.F.Vinen[12)]である。円筒容器に液体ヘリウムを入れ中心軸に直径 20μm の細い導線をはり，流体内部に二重連結領域をつくる。始め T_λ より高い温度で容器を回転させ全流体を流し，その後ゆるやかに冷却して $T = 1.3$K まで下げる。そして容器を止めて超流動渦流をつくる。測定の原理は渦流が導線のまわりに循環をつくると，導線が速度 $\boldsymbol{V}$で動くときに Magnus 力††

† 括弧の中の最後の数因子は渦環の芯の構造により変化する。この式は渦環の占める体積 $2\pi^2 a^2 R$の中に含まれる流体が剛体的に回転しているとしたときの結果である[11)]。

†† 流体力学によると，静止流体中を循環をもつ物体が動くとき，あるいは循環を持つ物体が流れの中に置かれたときに受ける揚力である。これは Kutta-Joukowski の定理として知られている。

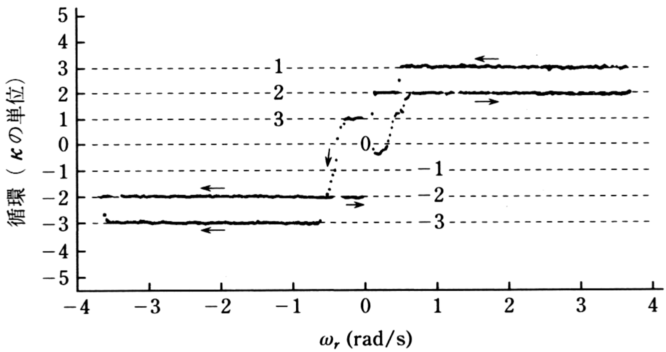


3·3 図　循環 $n\kappa$ の測定頻度グラフ
($\kappa = h/m_4$)

$$\boldsymbol{f}_{\mathrm{M}} = \rho_{\mathrm{s}}\,\kappa\,\widehat{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{V} \tag{3.53}$$

を受けることを利用する。ここで $\widehat{\boldsymbol{\omega}}$ は渦度の方向を表す単位ベクトルである。導線には交流電流を流し，それを垂直な磁場の中に置くことにより導線を振動させる。渦流がないときは，互いに直角な 2 つの偏りをもつ振動が縮退 (同じ振動数) しているが，渦流が存在すると Magnus 力により縮退がとれて，反対向きに回る円偏波となる。それらの振動数の差は$\Delta\nu = \rho_{\mathrm{s}}\kappa/2\pi M$ となる。ここで Mは単位長さ当たりの導線の質量と，これが排除した流体の質量の和である。$\Delta\nu$ は導線に現れる誘導起電力のうなり (ビート) 振動数として測定され，循環 κ が決定される。多数回の測定で得られた循環の値の頻度グラフ (3·3 図) を見ると，確かに $\kappa = h/m_4$ の値 ($n\kappa$ の $n = 1$) のところに高い頻度を示している。

P.W.Karn ら[13]は，Vinen と基本的に同じ方法により，$0.3 \leq T \leq 0.7$ K の低温で循環の測定を行った。渦流のつくり方は Vinen の方法とは異なり，上記温度で静止状態から一方向に回転速度 ω_{r} で回す。最大値 $\omega_{\mathrm{r}} = 4$ rad/s まで達した後は減速し，0 を通って逆方向に回転し前と同じ過程で静止状態に戻る。この 1 サイクルを 10 時間かけ，循環の測定は 10 秒ごとに行ったという。結果の一例が 3·4 図で，横軸は容器の回転速度である。確かに循環の量子単位は κ であるが，2 あるいは 3κ の循環が長時間安定であり，それら間の移り変わりも見られる。また $|\omega_{\mathrm{r}}|$ のいくつかの値では，$n\kappa$ とは異なる非量子的な値も現れている。これらの事実に対しては次のような

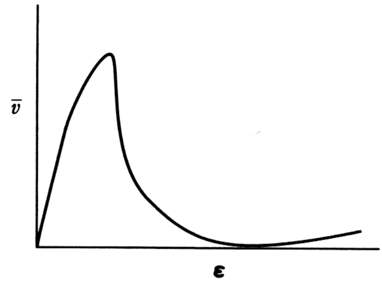


3·4 図 回転角速度ω_rに対する循環 $n\kappa$の測定値

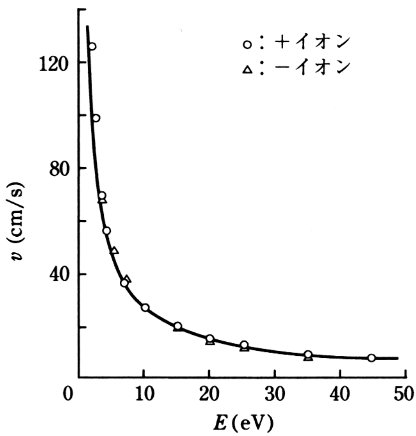
推論がある。容器の回転は導線のまわりの渦流の他に，導線からはずれた安定あるいは不安定な渦糸を生成し，さらに渦糸の端あるいは一部が導線に付着しているとする考えである。しかし明確な結論には達していないようである。

渦環の実験　　循環の量子単位 κ が，実際に (3.45) に与えられる値となること，そして渦糸の芯が微視的な大きさになることを実証した実験について概略する。これは液体ヘリウムにイオンを注入し，生成された渦環とイオンの結合体の運動を利用したものである。放射線源から液体ヘリウムの中に注入されたイオン (例えば α 粒子) はまわりのヘリウム原子と静電的相互作用により半径数 Å 程度の結合体 (snowball とよぶ) をつくり，移動するとき $40m_4$程度の有効質量を持つ。電子を注入した場合は，自身の零点運動によりヘリウム原子を押し退け流体の圧力とつり合って 10 ~ 20Å (圧力に依存) ほどの空孔 (bubble) をつくり，$250m_4$の有効質量をもって動く。電場 $\mathcal{E}$ により加速したときのイオンの平均速度 $\bar{v}$ の定性的な振舞いを示したのが 3·5 図である。$\mathcal{E}$ に比例して $\bar{v}$ が増加している部分はイオンがこのような結合体として移動していることを示す。$\bar{v}$ が最大値に達した後急激に減少するのは，それ以上のイオン速度になると渦環が生成されそれにイオンが捕獲され，新たな結合体として移動することによるものである。

G.W.Rayfield と F.Reif[14] はイオンによって生成される渦環の運動を，それが受ける抵抗 (これは 7 章で述べる相互摩擦による) が無視できるほどの



3·5 図 電場$\mathcal{E}$によるヘリウム中のイオンの平均移動速度 $\bar{v}$



3·6 図 イオン-渦環結合体のエネルギー E (eV) と速度 v ($\mathrm{cm \cdot s^{-1}}$)

低温，$T = 0.3$ K で調べた。イオン源と途中に置かれた電極の間に電位 V をかけると，イオンにより生成された渦環は，ある大きさの半径まで成長し自己誘導速度 v とエネルギー $E = eV$をもつ。その後の自由運動の速度 v を飛行時間法 (time of flight) を用いて測定した。正および負の電荷のイオンに対し，測定されたEと v の間には 3·6 図のような結果が得られた。他方，図の実線は (3.50) と (3.51) から R を消去し，$\rho_s \simeq \rho = 0.145$ g/cm^3 と，そこに含まれる 2 つのパラメーターに

$$\kappa = (1.00 \pm 0.03) \times 10^{-3}\mathrm{cm}^2/\mathrm{s}, \qquad a = (1.28 \pm 0.13)\text{Å} \qquad (3.54)$$

を用いたときに得られる E-v 曲線である。κ の理論値，(3.45) との一致は見事である。また a の値も以前に評価したもの (3–4 節を参照) と整合している。この実験データでは，E が 1.5 ～ 45eV，それに対応した半径 R が $10^{-6} \sim 10^{-4}$cm の範囲のものである。

なお，イオンの運動による渦の生成の問題は，この後も研究が続けられており，これについては 6 章で再び討論する。

4. 液体ヘリウム(^{4}He)の基底状態と励起状態

前章では理想 Bose 系と同様に，相互作用が重要な役割をしている液体ヘリウムにおいても B-E 凝縮が実現していることを期待して話を進めてきた。期待してと言ったのはそれを厳密に示すことは困難だからである。このことは絶対零度での凝縮体の粒子数 N_0 の値を正確に求める問題と，そして基底状態の波動関数を正確に知ることと同じであり正確な取り扱いは容易ではない。それにもかかわらず Bose 系の多体問題はいろいろな角度から多くの研究がなされてきた。ここでは代表的な理論を，基底状態と励起状態のそれぞれについて述べることにする。そしてこれらと平行して進められてきた中性子散乱による実験の現状についてまとめておく。

4–1 基底状態

相互作用を摂動論的に扱う方法もあるが，ここでは二粒子間の相関に基礎を置いた基底状態の議論を中心にその方法と結果についての概略を記す。基底状態の性質は当然ながら，次節に述べるように励起状態の性質にも深いかかわりをもつ。

通常の多体問題で扱うようにハミルトニアンとしては運動エネルギーと二体ポテンシャルの和

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\sum_{i=1}^{N}\nabla_i^2 + \sum_{i<j} V(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j) \tag{4.1}$$

をとり，これに対する基底状態の Schrödinger 方程式

$$H\,\Phi_0(\boldsymbol{r}_1, \cdots, \boldsymbol{r}_N) = E_0\,\Phi_0(\boldsymbol{r}_1, \cdots, \boldsymbol{r}_N) \tag{4.2}$$

を考える。波動関数 Φ_0は一般に実関数にとることができるが，Bose 系に対しては特にその対称性のために正の関数 (≥ 0) に選びうることが証明されている[1)]。理想 Bose 系の基底状態ではすべての粒子が $\boldsymbol{p}=0$ にあり，その波動関数は一定の振幅で全空間に広がっている。相互作用を考慮したとき基底状態の波動関数 Φ_0にどのような効果が現れるだろうか。定性的にわかることは (1.1) に見られるように 2 つの原子が近づくと強い斥力が働き，そのため原子間距離 r が $r \leq \sigma$ の領域では Φ_0は急激にゼロとなる。他方，原子が離れた $r > \sigma$ の空間では弱い引力を別とすればほとんど自由となる。この事実に注目して二原子間の相関を表す正の関数 $f(|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|)$ を導入し，これを用いて全体の Φ_0が近似的に表されると考え，

$$\Phi_0(\boldsymbol{r}_1, \cdots, \boldsymbol{r}_N) = Q_N^{-\frac{1}{2}} \prod_{i<j} f(r_{ij}), \qquad |\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j| = r_{ij} \tag{4.3}$$

とおく。二原子の相対座標の対 r_{ij}をすべてとっているので (4.3) は全体として対称化されている。Q_Nは Φ_0を 1 に規格化するための因子で

$$Q_N = \int \prod_{i<j} f^2(r_{ij})\, d^N\boldsymbol{r}, \qquad d^N\boldsymbol{r} = d\boldsymbol{r}_1 d\boldsymbol{r}_2 \cdots d\boldsymbol{r}_N \tag{4.4}$$

そこで問題は $f(r_{ij})$ をどのように決めるかであるが，これ自体それほど簡単ではない。

O.Penrose と L.Onsager[1)]は相互作用の斥力のみに注目し，それに対し剛体球モデル

$$V(r) = \begin{cases} \infty, & (r \leq \sigma) \\ 0, & (r > \sigma) \end{cases} \tag{4.5}$$

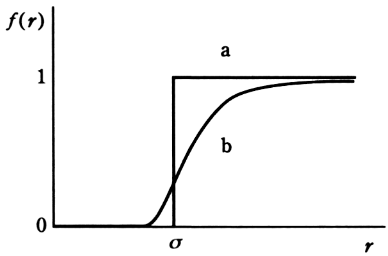
を採用した ($r_{ij} \equiv r$)。これに対応して，$f(r)$ としては**短距離相関**を表す最も単純なステップ関数

$$f(r) = \begin{cases} 0, & (r \leq \sigma) \\ 1, & (r > \sigma) \end{cases} \tag{4.6}$$

を選んだ (4·1 図の a)。絶対零度では，前節で導入した一粒子密度行列 (3.17) は Φ_0により

$$\rho_1(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') = N \int \Phi_0(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_N) \Phi_0(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}_2 \cdots, \boldsymbol{r}_N) d\boldsymbol{r}_2 \cdots d\boldsymbol{r}_N \tag{4.7}$$

と表される。(4.3)，(4.6) を用いて (4.7) を計算するとき，古典統計力学で



4·1 図　相関関数 $f(r)$ の模式図
a: ステップ関数 (4.6) 式
b: 現実的な関数 (例えば (4.11) 式)

の剛体球モデルに対する配位分配関数の結果が利用できる。そして (3.22) から凝縮体の個数 N_0 を求めると，計算の詳細は省くが得られた N_0 の値は N の約 8%となった。

(4.6) よりはもう少し現実的な f を採用するためには変分法を利用する。基底状態のエネルギー期待値 (一粒子当たり) は (4.1)，(4.3) を用いると

$$E_0 = \frac{1}{N}(\Phi_0, H\Phi_0) = \frac{n}{2}\int\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 \ln f(r) + V(r)\right] g(r)d\boldsymbol{r} \qquad (4.8)$$

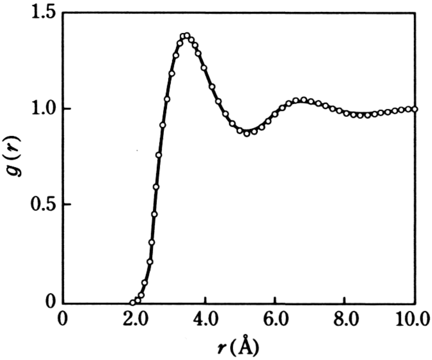
のように表せる。ここで $n = N/V$ は数密度，$g(r)$ は動径分布関数 (radial distribution function) とよばれ

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') &= n^{-2}\int\sum_{i\neq j}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i)\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_j)\Phi_0^2(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_N)d^N\boldsymbol{r} \\ &= n^{-2}N(N-1)\int\Phi_0^2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}_3\cdots,\boldsymbol{r}_N)d\boldsymbol{r}_3\cdots d\boldsymbol{r}_N \qquad (4.9)\end{aligned}$$

で定義される。これは 1 つの粒子が $\boldsymbol{r}$ にあり，他の粒子が $\boldsymbol{r}'$ に存在する確率を相関のないときの値 n^2 で規格化したものである。(4.3) を採用したときには

$$g(r_{12}) = \frac{V^2}{Q_N}\int\prod_{i<j} f^2(r_{ij})d\boldsymbol{r}_3\cdots d\boldsymbol{r}_N \qquad (4.10)$$

となる。W.L.McMillan[2) は短距離相関の変分関数 $f(r)$ として，2 つのパラメーター a, b を含む



4·2 図 動径分布関数

$$f(r) = \exp\left[-\left(\frac{a}{r}\right)^b\right] \tag{4.11}$$

を採用した (4·1 図の曲線 b)。相互作用は (1.1) の Lennard-Jones ポテンシャル ($\varepsilon = 10.22$ K, $\sigma = 2.56$Å) を採用する。Monte Carlo 法により (4.8) を最小にするように決められた変分パラメーターの値は $a \simeq 2.6$Å, $b = 5$ であり，そのときのエネルギーは一粒子当たり温度に換算して $E_0 \simeq -6$K である。これは実験値 $E_0 = -7.15$K に近い値といえる。またこの $f(r)$ を用いて $g(r)$ も求まる。

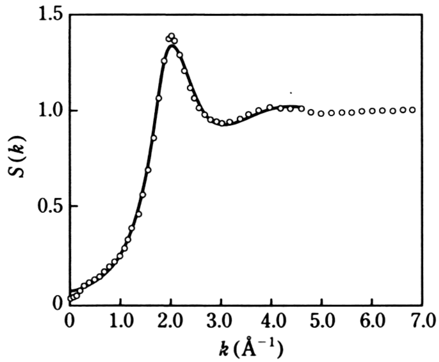
対相関関数 $g(r)$ の Fourier 変換により

$$S(k) = 1 + n\int[g(r) - 1]e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}d\boldsymbol{r} \tag{4.12}$$

で定義される量 $S(k)$ は (静的) 構造因子とよばれ，X 線や中性子線の実験により直接測定される量である。そして $g(r)$ とともに液体や固体の構造の特徴を示す量としてよく用いられる。4·2 図の $g(r)$，4·3 図の $S(k)$ は，上の取り扱いを改良した M.H.Kalos ら[3)]の計算結果 (実線)† と測定点を示したもので，大変よい一致が見られる。

ところで上記の計算で得られた $f(r)$ は $b = 5$ という高い幅のため $r \leq a$ で急激にゼロになり短距離の相関をよく表しているが，実際には長距離にわたる相関もあり，これを考慮することがすぐ後で述べるように重要である。長距離相関をも含む $f(r)$ として，

† 相互作用ポテンシャルの形と短距離相関の扱いを改良し，GFMC(Green function Monte Carlo) とよばれる方法による。



4·3 図 静的構造因子

$$f(r) = \exp\left[-\left(\frac{a}{r}\right)^b - \frac{\alpha}{r^2 + k_c^{-2}}\right] \tag{4.13}$$

の表式が用いられた[4)]。指数の中の第二項が長距離相関を表す。次節で見るように基底状態に近い励起状態は波数 k の小さい密度のゆらぎとして表され，その励起エネルギーは k に比例するフォノンとなる。このフォノンの零点振動が基底状態に寄与することになり，波数として $0 < k \leq k_c$ の範囲のものを考慮したときに (4.13) の形となる。そのとき定数 α は $\alpha = mc/\pi^2 n\hbar$ となる。ここで m, c は原子質量と音速である。また上限の波数 k_c は三つめの変分パラメーターで，変分計算の結果として $k_c \sim 0.5\text{Å}^{-1}$ となった。そして (4.11) の f では得られなかった顕著なことは，$k \to 0$ で $S(k)$ が k に比例する結果となったことである。この事実はフォノンの零点振動による長距離相関のみを考慮した理論により一般的に導くことができ，

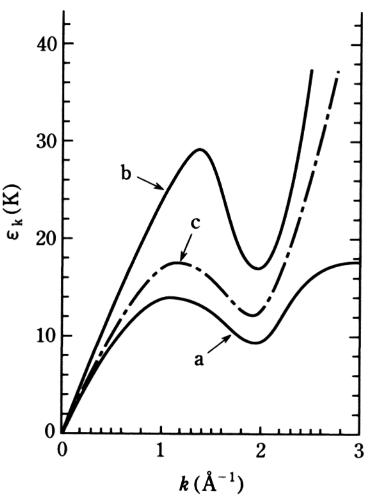
$$\lim_{k\to 0} S(k) = \frac{\hbar k}{2mc} \tag{4.14}$$

という結果が得られ，実験結果ともよく符合している (4·3 図)。次節で述べるように，励起状態に対する Bogoliubov そして Feynman の理論ではこの基底状態の性質が反映してフォノンの励起スペクトルが波数 k に比例することが示され，つじつまのあった結果となる。基底状態に対する最近の議論については L.Reatto[5)] の報告がある。

4–2 励起量子

固体の励起状態は低エネルギーに限れば格子上に配列した原子の集団運動により表されるが，これは格子振動の量子化によりフォノンとよばれる励起量子として記述される。固体のフォノンには3つの偏り，縦波と2つの横波が存在する。そして熱力学的性質は温度に応じて励起されるフォノンの個数分布により定まる。液体ヘリウムの励起状態も固体に似た側面があるが，Bose 流体の特徴も現れる。運動量 p，エネルギー ε_p の励起量子を Landau は素励起 (elementary exitation) とよんだ。この節ではまず液体ヘリウムの素励起として広く受け入れられている励起量子フォノン・ロトンのスペクトルと，それの熱的性質への寄与について述べ，次節でその微視的理論について考察する。

フォノン・ロトンのスペクトル　Landau[6] は実験で測定された比熱の温度依存性を説明する目的で，4·4 図の曲線 a で表されるような励起スペク



4·4 図　フォノン・ロトン曲線 ($k = p/\hbar$)
a：実測値 (中性子散乱)
b：Feynman の理論
c：Feynman-Cohen の理論

トルの存在を仮定した。その後このスペクトルは，4–4 節で述べるように中性子の非弾性散乱の実験から定量的に確認された。この曲線は運動量 $\boldsymbol{p}$ の大きさにより 2 つの特徴的な領域に分かれ，フォノンおよびロトンとよばれる。

p の小さい $(p < p_m)$ 範囲では p に線形† なフォノンで音速 c を用いて，

$$\varepsilon_p = cp, \qquad c = 238\,\mathrm{m/s}. \tag{4.15}$$

と表される。これは次節で見るように密度のゆらぎを表す縦波の集団運動のスペクトルである。そして $p_m/\hbar = 1.1\text{Å}^{-1}$ でマクソン (maxon) とよばれる ε_p の極大値に達し，その後 $(p_m < p)$，ロトンにつながる。ロトンは $p = p_0$ で極小値 Δ をとり，その前後は近似的に

$$\begin{aligned} &\varepsilon_p = \Delta + \frac{(p-p_0)^2}{2\mu}, \\ &\frac{\Delta}{k_\mathrm{B}} = 8.6\mathrm{K}, \qquad \frac{p_0}{\hbar} = 1.9\text{Å}^{-1}, \qquad \mu = 0.15 m_4 \end{aligned} \tag{4.16}$$

と表される。このスペクトルは $p_c/\hbar = 3.6\text{Å}^{-1}$ まで続くがそれ以上では素励起としては存在しない††。ロトンの物理的描像についても次節で議論する。

励起量子と熱的性質　$T = 0$ では系は基底状態にあるが，有限温度になると励起量子が熱的に励起される。フォノンあるいはロトン (質量ゼロ) も Bose 統計に従う準粒子であるが，熱的に励起される個数が希薄であれば励起量子の間の相互作用を無視した気体として扱ってよく，理想 Bose 系の統計力学が適用できる。したがって有限温度の性質はエネルギー $\varepsilon_{\boldsymbol{p}}$ の熱平衡分布関数

$$n^0_{\boldsymbol{p}} = \left[\exp\left(\frac{\varepsilon_{\boldsymbol{p}}}{k_\mathrm{B}T}\right) - 1\right]^{-1} \tag{4.17}$$

により定まり，例えば内部エネルギーとエントロピーは

$$E = \sum_{\boldsymbol{p}} \varepsilon_{\boldsymbol{p}}\, n^0_{\boldsymbol{p}} \tag{4.18}$$

$$S = k_\mathrm{B} \sum_{\boldsymbol{p}} \left[\left(1 + n^0_{\boldsymbol{p}}\right)\log\left(1 + n^0_{\boldsymbol{p}}\right) - n^0_{\boldsymbol{p}} \log n^0_{\boldsymbol{p}}\right] \tag{4.19}$$

---

† 厳密にはわずかに上に凸な分散があることが，比熱の温度依存性や中性子非弾性散乱の実験から知られている (4–4 節を参照)。

†† L.P.Pitaevskii[7] は ε_p が 2Δ より大きくなると，2 個またはそれ以上の素励起に崩壊して安定ではなくなることを指摘した。

と与えられる。そして十分低温の比熱はフォノンの熱励起により計算できることは，固体の場合と同じで，定積比熱 $C_{\rm ph}$

$$C_{\rm ph} = \frac{2\pi^2 k_{\rm B}}{15\rho}\left(\frac{k_{\rm B}T}{\hbar c}\right)^3 \tag{4.20}$$

と T^3 に比例する。温度が上がり，$T \simeq 0.6$ K 以上になるとロトンの寄与

$$C_{\rm r} = \frac{2p_0^2\, k_{\rm B}\,(\mu k_{\rm B}T)^{1/2}}{(2\pi)^{3/2}\,\rho\,\hbar^3}\, e^{-\Delta/k_{\rm B}T}\left[\frac{3}{4} + \frac{\Delta}{k_{\rm B}T} + \left(\frac{\Delta}{k_{\rm B}T}\right)^2\right] \tag{4.21}$$

が重要となる。これらの結果は T_λ 近くを除いて実験とよく一致している。

このように有限温度の性質を支配するのは励起量子の集団気体であり，これを**常流体**とよぶ。さらに流れが存在するときにもこの描像は正しく，超流体とは独立な性質を示すことは 5–2 節で示される。

4–3 励起状態の理論

凝縮体のゆらぎ (Bogoliubov 理論)　3–1 節でふれたように London は理想気体の B-E 凝縮が液体ヘリウムの超流動相実現に本質的であるとし，他方 Landau は B-E 凝縮をあらわには考慮せず，むしろ流体の特徴に注目して，原子間相互作用の重要性を指摘して上記のスペクトルを提唱した。この両者の主張を同時に考慮して，微視的理論を始めて展開したのは N.N.Bogoliubov[8)] である。先に超流動相を特徴づける秩序変数の運動を (3.33) に基づいて調べた。これは ψ の運動方程式 (3.31) で ψ をその平均値 Ψ で近似したものであった。以下では Bogoliubov のそれと多少異なる取り扱いであるが，Ψ のゆらぎの運動がフォノンのスペクトルをもつことを示す。用いる近似は同じで，g が十分弱く，n_0 が n に近いときの理論である。したがってそのままの形では実際の液体ヘリウムに適用できないことを注意すべきである。

(3.31) に (3.32) を代入すると第ゼロ近似ではもちろん (3.33) が成立する。一次近似は $\tilde{\psi}$，$\tilde{\psi}^+$ の一次まで残す線形近似をとると，

$$i\hbar\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial t} = -\left(\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \mu - 2g|\Psi|^2\right)\tilde{\psi} + g\Psi^2\tilde{\psi}^+ \tag{4.22}$$

$$-i\hbar\frac{\partial\widetilde{\psi}^+}{\partial t} = -\left(\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \mu - 2g|\Psi|^2\right)\widetilde{\psi}^+ + g\Psi^{*2}\tilde{\psi} \tag{4.23}$$

となる。ここでは凝縮体が一定の超流動速度 $\boldsymbol{v}_{\rm s}$ で流れている場合を考察

する。このとき凝縮体は運動量 $m\boldsymbol{v}_\mathrm{s}$の状態に凝縮しており，ゆらぎは $\boldsymbol{v}_\mathrm{s}$とともに動く基準系で見たものである。このとき μ，Ψ は次のようにおけばよい。

$$\mu = gn_0 + \frac{m\boldsymbol{v}_\mathrm{s}^2}{2} \tag{4.24}$$

$$\Psi(\boldsymbol{r}) = \sqrt{n_0}\, e^{i\frac{m}{\hbar}\boldsymbol{v}_\mathrm{s}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{4.25}$$

ゆらぎの演算子 $\tilde{\psi}\,(\tilde{\psi}^+)$ は Fourier 展開 (3.13) により

$$\tilde{\psi}(\boldsymbol{r},t) = V^{-\frac{1}{2}} \sum_{\boldsymbol{k}}{}' a_{\boldsymbol{k}}(t)\, e^{i(\boldsymbol{k}+\frac{m}{\hbar}\boldsymbol{v}_\mathrm{s})\cdot\boldsymbol{r}} \tag{4.26}$$

と表す。ここで和の記号のプライムは $\boldsymbol{k} \neq 0$ を意味するが，それは以下の理由による。凝縮体 ($\boldsymbol{k}=0$) の粒子数 N_0は巨視的な数であり，そのときには交換関係 (3.2) の右辺の 1 は無視できる。したがってもはや演算子としてではなく，

$$a_0 = a_0^+ = \sqrt{N_0} \tag{4.27}$$

とおくことができる。これらの項はすでに (4.25) の Ψとして考慮ずみである。(4.24)～(4.26)，そして $\Psi^*, \tilde{\psi}^+$の表式を (4.22)，(4.23) に代入すれば

$$i\hbar\frac{\partial a_{\boldsymbol{k}}}{\partial t} = (\varepsilon_{\boldsymbol{k}}^0 + \hbar\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_\mathrm{s} + gn_0)a_{\boldsymbol{k}} + gn_0\, a_{-\boldsymbol{k}}^+$$

$$-i\hbar\frac{\partial a_{-\boldsymbol{k}}^+}{\partial t} = (\varepsilon_{\boldsymbol{k}}^0 - \hbar\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_\mathrm{s} + gn_0)a_{-\boldsymbol{k}}^+ + gn_0\, a_{\boldsymbol{k}}$$

となる。ここで $\varepsilon_{\boldsymbol{k}}^0 = \hbar^2k^2/2m$ (自由粒子のエネルギー) とおいた。$a_{\boldsymbol{k}}, a_{\boldsymbol{k}}^+$ の連立方程式の基準振動を求めるために Bogoliubov の線形変換

$$\begin{aligned}\alpha_{\boldsymbol{k}} &= u_{\boldsymbol{k}}\, a_{\boldsymbol{k}} - v_{\boldsymbol{k}}\, a_{-\boldsymbol{k}}^+ \\ \alpha_{-\boldsymbol{k}}^+ &= u_{\boldsymbol{k}}\, a_{-\boldsymbol{k}}^\dagger - v_{\boldsymbol{k}}\, a_{\boldsymbol{k}}\end{aligned} \tag{4.28}$$

を用いる。ヘリウム原子の生成，消滅演算子 $a_{\boldsymbol{k}}, a_{\boldsymbol{k}}^+$が Bose 統計の交換関係 (3.2) にしたがっていたから，この変換で定義された準粒子の演算子$\alpha_{\boldsymbol{k}}, \alpha_{\boldsymbol{k}}^+$も同じ交換関係

$$[\alpha_{\boldsymbol{k}}, \alpha_{\boldsymbol{k}'}^+] = \delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'} \tag{4.29}$$

を満たすことを要請する。これと，$\alpha_{\boldsymbol{k}}, \alpha_{\boldsymbol{k}}^+$ が基準座標となるための条件はそれぞれ，

$$u_{\boldsymbol{k}}^2 - v_{\boldsymbol{k}}^2 = 1 \tag{4.30}$$

$$2u_{\boldsymbol{k}}\, v_{\boldsymbol{k}}(\varepsilon_{\boldsymbol{k}}^0 + gn_0) + (u_{\boldsymbol{k}}^2 + v_{\boldsymbol{k}}^2)\, gn_0 = 0 \tag{4.31}$$

と与えられる。この二式から $u_{\boldsymbol{k}}, v_{\boldsymbol{k}}$は，

$$\begin{aligned} u_{\boldsymbol{k}} &= \frac{1}{2}\left[\frac{\varepsilon_{\boldsymbol{k}}^0 + g\,n_0}{\varepsilon_{\boldsymbol{k}}} + 1\right]^{1/2} \\ v_{\boldsymbol{k}} &= \frac{1}{2}\left[\frac{\varepsilon_{\boldsymbol{k}}^0 + g\,n_0}{\varepsilon_{\boldsymbol{k}}} - 1\right]^{1/2} \end{aligned} \tag{4.32}$$

と決まる。ここで

$$\varepsilon_{\boldsymbol{k}} = \sqrt{\varepsilon_{\boldsymbol{k}}^0(\varepsilon_{\boldsymbol{k}}^0 + 2g\,n_0)} \tag{4.33}$$

とおいた。これらを用いて基準振動の運動方程式は

$$i\hbar\frac{\partial \alpha_{\boldsymbol{k}}}{\partial t} = \widetilde{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}\, \alpha_{\boldsymbol{k}}$$

となる。ここで固有振動数 $\widetilde{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}$ は

$$\widetilde{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}} = \varepsilon_{\boldsymbol{k}} + \hbar\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}} \tag{4.34}$$

である。これは $\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}$で動く基準系での準粒子の励起エネルギー $\varepsilon_{\boldsymbol{k}}$が Galilei 変換により $\hbar\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}$だけ変化することを示している。(4.33) の $\varepsilon_{\boldsymbol{k}}$は凝縮体のゆらぎによる励起エネルギーで波数 $|\boldsymbol{k}| = k$ の大きいときには自由粒子の $\varepsilon_{\boldsymbol{k}}^0$となるのに対し，小さな k に対しては

$$\varepsilon_{\boldsymbol{k}} = \hbar ck, \qquad c = \sqrt{gn_0/m} \tag{4.35}$$

となり，音速 c のフォノンとなる†。このように長波長のゆらぎのスペクトルは，凝縮体から励起される個々の自由粒子の励起エネルギーではなく，斥力の影響で k に比例した集団運動としてのフォノンとなり，この準粒子の生成，消滅演算子が $\alpha_{\boldsymbol{k}}^+, \alpha_{\boldsymbol{k}}$ である。

ここで系の全運動量密度の期待値 $\boldsymbol{j}$ が，凝縮体とそのゆらぎである励起状態のフォノンの流れの和として表されることを示しておく。運動量密度の期待値は (3.32) およびその共役演算子を用いて，

$$\boldsymbol{j} = \frac{\hbar}{2i}[(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*) + (\langle\tilde{\psi}^+\nabla\tilde{\psi} - \tilde{\psi}\nabla\tilde{\psi}^+\rangle)] \tag{4.36}$$

† Bogoliubov 近似での $S(k)$((4.12) および (4.14) を参照) は $S_{\mathrm{B}}(k) = \sqrt{\varepsilon_{\boldsymbol{k}}^0/(\varepsilon_{\boldsymbol{k}}^0 + 2g\,n_0)}$ と与えられ，これを用いて (4.33) は$\varepsilon_{\boldsymbol{k}}^0/S_{\mathrm{B}}(k)$ と書ける。この形は次の Feynman の理論で一般化される ((4.45) を参照)。$S_{\mathrm{B}}(k)$ は確かに $k \to 0$ で (4.14) の関係を満たしている。

と書ける。ここで $\langle\tilde{\psi}^+\rangle = \langle\tilde{\psi}\rangle = 0$ を用いた。第一項は凝縮体の寄与 (3.41), 第二項は (4.26) を代入することにより，次のように $\boldsymbol{k} \neq 0$ の励起粒子からの寄与であることがわかる。

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{j} &= mn_0\boldsymbol{v}_\mathrm{s} + V^{-1}\sum_{\boldsymbol{k}}(\hbar\boldsymbol{k} + m\boldsymbol{v}_\mathrm{s})\,\langle a^+_{\boldsymbol{k}}\, a_{\boldsymbol{k}}\rangle \\
&= mn\boldsymbol{v}_\mathrm{s} + V^{-1}\sum_{\boldsymbol{k}}\hbar\boldsymbol{k}\langle a^+_{\boldsymbol{k}}\, a_{\boldsymbol{k}}\rangle
\end{aligned}
\tag{4.37}
$$

最後の表式を得るのに粒子数に対する，$n = n_0 + V^{-1}\sum_{\boldsymbol{k}}\langle a^+_{\boldsymbol{k}} a_{\boldsymbol{k}}\rangle$ の関係を用いた。(4.37) の第一項は凝縮体が $\boldsymbol{v}_\mathrm{s}$で動くとき励起粒子も同じ速度で参加し，全体の質量密度 $\rho = mn$ が $\boldsymbol{v}_\mathrm{s}$で流動するとしたときの寄与であるが，第二項はそれとは独立な励起粒子の運動量密度の寄与を表している。(4.28) の逆変換を用いて (4.37) の第二項をフォノンの座標 α, α^+で表し (4.30) に注意すると，ここでの近似では $\sum_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{k}\langle a^+_{\boldsymbol{k}}\, a_{\boldsymbol{k}}\rangle = \sum_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{k}\langle \alpha^+_{\boldsymbol{k}}\alpha_{\boldsymbol{k}}\rangle$ となることがわかる。その結果，$\boldsymbol{j}$ はフォノンの分布関数 $\langle \alpha^+_{\boldsymbol{k}}\alpha_{\boldsymbol{k}}\rangle \equiv n_{\boldsymbol{k}}$を用いて

$$
\boldsymbol{j} = \rho\boldsymbol{v}_\mathrm{s} + V^{-1}\sum_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{k}n_{\boldsymbol{k}} \tag{4.38}
$$

となる。5–2 節でみるように Landau の二流体論では，より一般的にこの表式が導かれるが，(4.38) は Bogoliubov 近似の範囲ではあるが，微視的理論によりそれを基礎づけしたものである。

フォノン (Feynman 理論)　Bose 系の励起状態がフォノンのスペクトルとして表されることを一般的に示したのは R.P.Feynman[9)]である。流体の中で 1 個の粒子が運動量 $\hbar\boldsymbol{k}$ で運動するとき，その波長 $2\pi/k$ が平均粒子間距離に比べて長いときには，粒子間斥力のため隣の粒子を少しだけ押しやり，それが次々とまわりに伝わる。これは流体密度のゆらぎが粗密波となって空間を伝播する音波である。前節では凝縮体のゆらぎのみに注目したが，ここでは流体全体の密度 $\rho(\boldsymbol{r}, t)$ の運動を考える。そして低エネルギーの励起状態の波動関数は，波数 $\boldsymbol{k}$ の密度のゆらぎが基底状態の上に波立ったものと考え，波動関数として

$$
\Phi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}_1, \cdots, \boldsymbol{r}_N) = \rho_{\boldsymbol{k}}\,\Phi_0(\boldsymbol{r}_1, \cdots, \boldsymbol{r}_N) \tag{4.39}
$$

をとる。ここで Φ_0は対称化された基底状態の波動関数であり，$\rho_{\boldsymbol{k}}$は密度演算子 $\rho(\boldsymbol{r})$ の Fourier 変換として，

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \sum_{i=1}^{N} \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i), \qquad \rho_{\boldsymbol{k}} = \int d\boldsymbol{r} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \rho(\boldsymbol{r}) = \sum_{i=1}^{N} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_i} \tag{4.40}$$

と与えられる。ここでは正しい励起状態の波動関数が (4.39) により与えられたものとして励起エネルギーを求める[†]。基底状態，励起状態の固有値方程式を

$$H\Phi_0 = E_0\Phi_0, \qquad H\Phi_{\boldsymbol{k}} = E_{\boldsymbol{k}}\Phi_{\boldsymbol{k}}$$

と書くと，$E_{\boldsymbol{k}} = E_0 + \varepsilon_{\boldsymbol{k}}$で定義される励起のエネルギー $\varepsilon_{\boldsymbol{k}}$は，

$$\varepsilon_{\boldsymbol{k}} = \frac{(\Phi_{\boldsymbol{k}}, (H - E_0)\Phi_{\boldsymbol{k}})}{(\Phi_{\boldsymbol{k}}, \Phi_{\boldsymbol{k}})} \tag{4.41}$$

と与えられる。分子の計算に際し，まず

$$\begin{aligned}(H - E_0)\Phi_{\boldsymbol{k}} &= [H, \rho_{\boldsymbol{k}}]\Phi_0 \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m}\sum_i \left(\nabla_i^2\, \rho_{\boldsymbol{k}} - \rho_{\boldsymbol{k}}\nabla_i^2\right)\, \Phi_0 \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m}\sum_i \left[(\nabla_i^2 \rho_{\boldsymbol{k}})\, \Phi_0 + 2\, (\nabla_i\, \rho_{\boldsymbol{k}})\, (\nabla_i\, \Phi_0)\right]\end{aligned}$$

となることに注意する。交換関係において相互作用の項は粒子座標のみに依存することから$\rho_{\boldsymbol{k}}$と交換する。これを用いて

$$\begin{aligned}(\Phi_{\boldsymbol{k}}, (H - E_0)\Phi_{\boldsymbol{k}}) &= -\frac{\hbar^2}{2m}\sum_i \int d^N\boldsymbol{r} \rho_{\boldsymbol{k}}^*\, \nabla_i \cdot [(\nabla_i\, \rho_{\boldsymbol{k}})\, \Phi_0^2] \\ &= \frac{\hbar^2}{2m}\sum_i \int d^N\boldsymbol{r}(\nabla_i\, \rho_{\boldsymbol{k}}^*)\, (\nabla_i \rho_{\boldsymbol{k}})\, \Phi_0^2 \\ &= N\frac{\hbar^2 k^2}{2m}\end{aligned} \tag{4.42}$$

を得る。ここで，Φ_0が実関数であること，対称関数であること，そして1に規格化されていることを用いた。次に (4.41) の分母は (4.39)，(4.40) から

† Feynman は，粒子の配置に応じて正または負の値をとる一粒子関数 $f(\boldsymbol{r}_i)$ を変分関数として，励起状態の波動関数を$\Phi_{ex} = \sum_i f(\boldsymbol{r}_i)\Phi_0$ととり，励起エネルギーを最小にする変分計算により $f(\boldsymbol{r}_i) = \exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_i)$ となることを示した。(4.40) を参照すれば Φ_{ex}が (4.39) に一致することがわかる。したがって以下に示される励起状態のエネルギー $\varepsilon_{\boldsymbol{k}}$はフォノンであり，それ以外の励起，例えば個別粒子の励起は存在しないことを示している。

$$(\boldsymbol{\Phi_k}, \boldsymbol{\Phi_k}) = \int d^N\boldsymbol{r}\,\rho_{\boldsymbol{k}}^*\rho_{\boldsymbol{k}}\,\Phi_0^2$$
$$= \iint d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{x}'\,e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}\int d^N\boldsymbol{r}\,\rho(\boldsymbol{x})\rho(\boldsymbol{x}')\,\Phi_0^2$$
$$= n\iint d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{x}'\,e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}p(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$$

と書ける。ここで $p(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$ は密度の相関関数

$$p(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') = n^{-1}\int d^N\boldsymbol{r}\,\rho(\boldsymbol{x})\rho(\boldsymbol{x}')\,\Phi_0^2 \tag{4.43}$$

で定義され，基底状態の性質で決まる量である。また $n = N/V$ は粒子数密度である。上式の積分は $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{x}$ について実行すれば，

$$(\boldsymbol{\Phi_k}, \boldsymbol{\Phi_k}) = N\int d\boldsymbol{r}\,e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}p(r) = NS(k) \tag{4.44}$$

と書くことができる。一様等方な系では p は距離 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'| = r$ のみに依存するとしてよいから $p(r)$ とした。ここで $p(r)$ の Fourier 変換として定義される $S(k)$ は (4.12) で導入された構造因子である。$p(r)$ は (4.9) で定義された対相関関数 $g(r)$ を用いて

$$p(r) = \delta(r) + n\,g(r)$$

のように表される†。(4.12) の $S(k)$ では，$g(r)$ が $r\to\infty$ で 1 となる量であることを考慮して $\boldsymbol{k}\neq 0$ に対する Fourier 変換として定義されている。

結局，(4.41) は (4.42)，(4.44) から

$$\varepsilon_{\boldsymbol{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2mS(k)} \tag{4.45}$$

となる。$S(k)$ の実測値は 4·3 図にみられるように k の小さいところで k に比例している。また理論的にも (4.14) のように与えられる。その結果 (4.45) の ε_k が $k\to 0$ で音速 c のフォノンのスペクトル $\varepsilon_{\boldsymbol{k}} = \hbar ck$ を与えることになる。4·4 図 に見るように $S(k)$ の実測値を用いた (4.45) の曲線 (b) は k の小さい領域で，中性子の非弾性散乱の実験から得られた実線とよい一致を示す。他方 k が大きくなり $k = k_0 \sim 1.9\text{Å}^{-1}$ では $S(k)$ の極大値に対応して極小を示してはいるが，実測のロトンとの一致はよくない。k がこの大きさになると波動関数 (4.39) が正しくなくなることを示している。

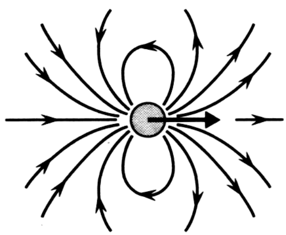
† これは (4.43) に$\rho(\boldsymbol{r})$ の表式 (4.40) を代入し，Φ_0の対称性に注意すれば容易に示すことができる。

低エネルギーのスペクトル $\varepsilon_{\boldsymbol{k}}$ が $\boldsymbol{k} \to 0$ の極限でフォノンを与えることは J.Gavoret と P.Nozières[10] によっても厳密に証明された。凝縮体の存在を仮定し，Bose 系の一粒子 Green 関数と密度の相関関数をダイアグラムを用いて摂動展開するという方法を用いる。このとき 2 つの関数は共通の極 (分母の零点) を持ち，それゆえ同じ励起エネルギーを与えること，それが系の圧縮率で表される速度をもつフォノンのスペクトルとなることを示した。しかし計算は $T = 0$ K に限られ，有限温度での議論は未だ成功していない。

ロトン (Feynman-Cohen 理論)　(4.39) では斥力による相関効果は基底状態の Φ_0 には含まれており，特に $r \sim 2\pi/k_0$ 程度の短距離相関により S_k が極大値を示した (4·3 図参照)。しかし密度ゆらぎ ρ_k でつくられた励起準粒子の間の相関は考慮されていない。

R.P.Feynman と M.Cohen[11] はその相関の形としてバック・フロー (back-flow) の効果を取り込むことが重要であることを指摘した。静止している完全流体中を 1 個の粒子が運動するとき，まわりの流体を押しのけることによりつくられる双極子型の流れのパターンがバック・フロー† である (4·5 図)。(4.39) にこの効果を取り入れた励起状態の波動関数として，

$$\Phi_{\boldsymbol{k}} = \sum_i e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_i} \left[1 + iA \sum_{j \neq i} \frac{\boldsymbol{k} \cdot (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j)}{|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|^3} \right] \Phi_0 \tag{4.46}$$



4·5 図　流体中を動く球のまわりのバック・フロー

† 非圧縮性のポテンシャル流で，きわめて近い 2 つの点に吸い込み口とわき出し口があるときに見られるパターンで，ちょうど電気双極子がつくる距離の 3 乗に逆比例する電気力線と類似している。

を仮定し，パラメーター A は励起エネルギーを最小にするように変分計算で求められた。その結果は 4·4 図の曲線 (c) で表され，実測のスペクトルにかなり近いものを与える。

A.Miller ら[12)]は Bose 流体中を質量 M_I の不純物粒子が運動するとき，実際に生ずるバック・フローの形，そして粒子の見かけの質量が増大することを微視的な議論により示した。不純物粒子と Bose 粒子との相互作用は摂動で扱い，Bose 流体の励起状態は前節で述べた Bogoliubov 近似によるフォノンとして系全体の波動関数を求めると，実際に不純物粒子はまわりに双極子型のバック・フローを誘起することを示した。また二次摂動によるエネルギーの評価により，不純物粒子の有効質量 M_I^* は近似的に

$$M_I^* = \frac{M_I}{1-\alpha}, \qquad \alpha = \frac{N'}{3N}\frac{m_4}{M_I} \tag{4.47}$$

で表されることが示された。ここで N' は励起されるフォノン・モードの個数，N は Bose 粒子数であり，m_4 は ^{4}He の質量である。不純物粒子として ^{3}He 原子をとるとき ($M_I = m_3 = (3/4)m_4$)，そして $N' \sim N$ とおく近似では $m_3^* = 1.8m_3$ を得るが，これは液体ヘリウム中に溶けている ^{3}He 原子の有効質量のモデル計算とみなせる。

最後に不純物粒子を ^{4}He 原子自身に採ったときには，(4.47) から $m_4^* = (3/2)m_4$ となる†。不純物粒子を ^{4}He 原子自身に採り，さらに対称化した波動関数をつくれば Feynman-Cohen の励起状態が再現できることが期待できる。この観点から励起状態を見直す目的で，(4.46) を Fourier 展開すると

$$\Phi_{\boldsymbol{k}} = \left[\rho_{\boldsymbol{k}} + 4\pi A \sum_{\boldsymbol{q}\neq\boldsymbol{k}} \frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{q}}{q^2}\rho_{\boldsymbol{q}}\rho_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}}\right]\Phi_0 \equiv \rho_{\mathrm{FC}}\Phi_0 \tag{4.48}$$

となる ((4.40) を用いる)。これを見ると Feynman-Cohen の励起演算子 ρ_{FC} がつくる状態は，Feynman のフォノンを 1 個および 2 個励起した状態の重ね合わせになっている。このことから，Feynman-Cohen の示したロトンは，まわりにフォノンの雲 (cloud) をまとった一粒子の運動モードであるという見方もできる。その後，素励起スペクトルの理論的導出を試みた仕事は多くあるが，上記理論を発展させた研究[13)]として，Feynman-Cohen のロ

† 古典流体では体積 V，質量 M の球形粒子が密度 ρ の流体中を運動するとき，バック・フローの効果により粒子の見かけの質量は重くなり，$M^* = M + \rho V/2$ となることが知られており，この結果と一致する。

トンを出発点に選び ($\rho_{\rm FC}$を$\rho_{\boldsymbol{k}}$の代わりにとる)，それを 1 個および 2 個励起した状態の相関を計算したものがあり，ロトンの実測値により近い結果を得ている。

フォノン，ロトンに対する物理的描像については，次章で述べるスペクトルの温度依存性との関連で再度議論するが，それとは少し違った観点，固体のスペクトルとの比較をしておく。横の偏りをもつフォノンは固体に固有なモードであるが，縦フォノンは密度の圧縮波で，液体ヘリウムのフォノンに対応することはすでに述べた。固体の音響フォノンでは波数 $\boldsymbol{k}$ が増大してゾーン境界，$\boldsymbol{k}=\boldsymbol{K}_0/2$ ($\boldsymbol{K}_0$は逆格子ベクトル) に達して最大値をとり，そこで群速度 $\partial\varepsilon_{\boldsymbol{k}}/\partial\boldsymbol{k}$ がゼロになることは，液体ヘリウムにおいてもマクソンの波数 $\boldsymbol{k}_m$で最大値を示す (4·4 図参照) ことと比較できる。波数 $|\boldsymbol{k}|$ がさらに増大して $\boldsymbol{K}_0$程度になると，固体の分散関係は周期性により，逆格子点では $\varepsilon_{\boldsymbol{K}_0}=0$ となるが，$\boldsymbol{k}$ の方向に依存していろいろな値をとる。液体では，周期性はないので，個体の分散関係の方向による平均値が $\varepsilon_{\boldsymbol{k}}$を与えるとみなすことができる。この観点からロトンのスペクトルも，平均粒子間隔 $r_{\rm m}$に対応する波数 $k_0\simeq 2\pi/r_{\rm m}$で励起エネルギーの最小値 Δを与えたものと見ることもできる。ただ次のことは注意すべきである。固体のフォノンが運動量 $\hbar\boldsymbol{k}$ をもつといっても結晶の重心に対するもの (結晶運動量とよばれる) で質量流には寄与しないが，液体ヘリウムでは真の運動量でフォノン，ロトンは常流体の質量流を担うことである。

4–4 中性子散乱による実験的検証

液体や固体の凝縮系における基底状態や励起状態の性質は，中性子線，X 線，光などの散乱実験を用いて調べられている。液体ヘリウムでは低温での測定技術の進歩により精度のよい実験結果が得られている。ここでは 1950 年代の後半から始まり現在でも新しいデータを提出している中性子散乱の実験について述べる†。熱中性子線の非弾性散乱の観測は，凝縮系の励起状態の性質あるいは動的な構造を知る手段として広く利用されている。特に液体ヘリウムでは低エネルギーのフォノン，ロトン，それらの多重励起のスペクトルなどの知見を得るのに，また凝縮体の粒子数測定の方法の

† ここではふれないが，液体ヘリウムでは光を用いた，Brillouin 散乱および Raman 散乱によっても多くの興味ある結果が得られている[14),15)]。

一つとして欠くべからざる実験的手段であり，現在までに多くの結果が集積されている。

中性子非弾性散乱，動的構造因子[16),17)]　速度の遅い熱中性子を用いるのは，その de Broglie 波長を凝縮系の平均原子間距離と同じ程度にすることにより，散乱の際の運動量やエネルギーの変化を精度よく観測するためである。中性子の散乱前後の運動量とエネルギーを，$\boldsymbol{p}, E_{\boldsymbol{p}}$ と $\boldsymbol{p}', E_{\boldsymbol{p}'}$ とするとき，それらの保存則は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}' &= \hbar \boldsymbol{k} \\ E_{\boldsymbol{p}} - E_{\boldsymbol{p}'} &= \hbar\omega \end{aligned} \tag{4.49}$$

と書かれる。中性子の運動量とエネルギーの変化量 $\hbar\boldsymbol{k}, \hbar\omega$を測定することにより，直接凝縮系に固有な状態遷移を特徴づける運動量とエネルギーの様子を知ることができる。中性子と液体の相互作用は液体粒子の原子核との相互作用である。これに対しては次のような擬ポテンシャル (pseudo potential)†が用いられる。

$$V_e(\boldsymbol{x}) = \frac{2\pi\hbar^2}{m_{\rm n}} a \sum_{i=1}^{N} \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r}_i) = \frac{2\pi\hbar^2}{m_{\rm n}} a \sum_{\boldsymbol{k}} \rho_{\boldsymbol{k}}\, e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \tag{4.50}$$

ここで $m_{\rm n}$は中性子の質量，a は散乱長 (scattering length)，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{r}_i$は中性子と原子核の位置座標である。最後の表式は (4.40) に定義した密度演算子を用いて表した。このポテンシャルに対しては第一 Born 近似が有効であり，したがって中性子の自由度に関する行列要素は

$$\langle \boldsymbol{p}' | V_e | \boldsymbol{p} \rangle = \frac{2\pi\hbar^2}{m_{\rm n}} a\, \rho_{\boldsymbol{k}}, \qquad \hbar\boldsymbol{k} = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}'$$

となる。散乱の前後の液体系のエネルギー E_i, E_fの状態を，$|i\rangle, |f\rangle$ と書くと，中性子の散乱微分断面積 (単位立体角，単位エネルギー当たり) は

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma}{d\Omega dE} &= \frac{p'}{p} a^2 \sum_{i,f} Z^{-1} e^{-\beta E_i} |\langle f | \rho_{\boldsymbol{k}} | i \rangle|^2\, \delta(\hbar\omega - E_f + E_i) \\ &\equiv \frac{p'}{p} a^2\, S(\boldsymbol{k}, \omega) \end{aligned} \tag{4.51}$$

と表される。ここで Zは分配関数である。$S(\boldsymbol{k}, \omega)$ は**動的構造因子**とよばれ，上の定義は 2 つの異なる時刻の密度演算子に対する相関関数の Fourier

† 液体ヘリウムの場合，^{4}He の原子核はスピンゼロであるからスピンの自由度に関係する作用はない。^{3}He の原子核ではこの自由度の考慮が必要となる。

変換,

$$S(\boldsymbol{k},\omega)=\frac{1}{2\pi\hbar}\int_0^\infty e^{-i\omega t}\langle\rho_{-\boldsymbol{k}}(t)\,\rho_{\boldsymbol{k}}(0)\rangle dt \tag{4.52}$$

と表現できる。ここで $\langle\cdots\rangle$ は熱平衡での統計的平均,

$$\langle\rho_{-\boldsymbol{k}}(t)\,\rho_{\boldsymbol{k}}(0)\rangle=\mathrm{Tr}\left[e^{-\beta H}\rho_{-\boldsymbol{k}}(t)\,\rho_{\boldsymbol{k}}(0)\right]\,/\,\mathrm{Tr}\,e^{-\beta H}$$

である。Hは液体のハミルトニアン,$\rho_{\boldsymbol{k}}(t)$ は Heisenberg 描像での演算子,$\rho_{\boldsymbol{k}}(t)=e^{iHt/\hbar}\rho_{\boldsymbol{k}}(0)e^{-iHt/\hbar}$を表す。以下では等方性を仮定して $S(\boldsymbol{k},\omega)\boldsymbol{k}$ の大きさのみによるとする。$S(k,\omega)$ を振動数について積分した

$$S(k)=\int_0^\infty S(k,\omega)\,d\omega \tag{4.53}$$

は,(4.52) の ω 積分から見られるように同時刻の密度相関を表し,すでに (4.12),(4.44) で導入した静的構造因子である (ここでは有限温度に一般化している)。基底状態 ($T=0$) では,$S(k,\omega)$ に対し一般的に成立する 2 つの和則 (sum rule)

$$\frac{\hbar^2k^2}{2m}=\int_0^\infty \omega\,S(k,\omega)\,d\omega \tag{4.54}$$

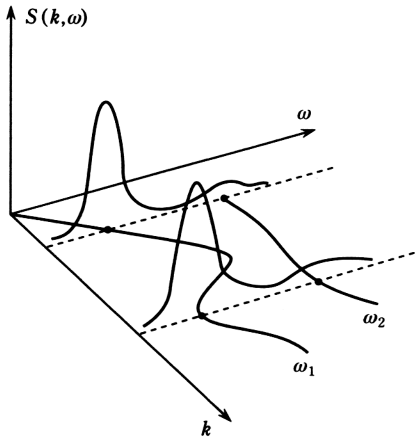
$$\frac{1}{2mc^2}=\lim_{\boldsymbol{k}\to 0}\int_0^\infty\frac{S(k,\omega)}{\omega}\,d\omega \tag{4.55}$$

が知られている。(4.54) は f-sum rule とよばれ,密度の保存則から導かれる一般的な関係式である。(4.55) は音速 c が圧縮率 κ により,$c=(m\rho\,\kappa)^{-1/2}$ と与えられ,圧縮率-sum rule とよばれる。

フォノン・ロトン・スペクトル,多重励起スペクトル　液体ヘリウムで観測されている $S(k,\omega)$ は,比較的小さい $k(\lesssim 4\text{Å}^{-1})$ のところでは近似的に

$$S(k,\omega)=Z_k\delta(\omega-\varepsilon_k)+S'(k,\omega) \tag{4.56}$$

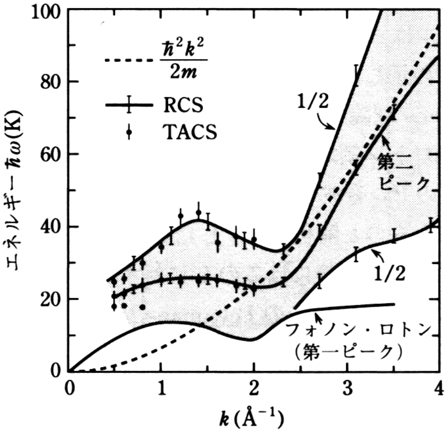
として解析することができる。第一項はフォノン,ロトンの素励起スペクトル ε_kとして同定できる部分で,Z_kはその強度である。実際には素励起は有限の寿命 τ を持っているが,十分低温では $\tau\to\infty$ と近似してよく,そのときの鋭いスペクトルを δ-関数で表したものである。第二項の $S'(k,\omega)$ は ε_kよりはエネルギーの高いところに幅広く現れるスペクトルで,2 個以上のフォノン,マクソンまたはロトンが励起される多重励起と解釈されるものである。中性子の散乱角を 1 つの値に固定し非弾性散乱によるエネルギー・スペクトルを測定 (各エネルギーごとの散乱粒子の個数を測定) す



4·6 図　$S(\boldsymbol{k},\omega)$ の模式図。
鋭い第一ピークがフォノン・ロトンのスペクトルω_1,
広がった幅の低い第二ピークが ω_2.

ることにより，1 つの波数 $\boldsymbol{k}$を固定してω を変化させたときの強度 $S(\boldsymbol{k},\omega)$ が得られる。4·6 図はいろいろな $\boldsymbol{k}$に対し縦軸に $S(\boldsymbol{k},\omega)$ をとった模式的な図である。フォノン，ロトンのスペクトル $\varepsilon_{\boldsymbol{k}}$は第一ピークの位置をなぞった曲線 ω_1で表され 4·7 図に示される。実測される $S(\boldsymbol{k},\omega)$ には有限の幅があり，それには装置に固有のものが含まれているので，それを差し引いた残りが素励起の寿命 τを与えることになる。τ は熱的に励起されたフォノンやロトンの間の相互作用により定まり，温度や圧力に強く依存する。4·6 図でもう少しエネルギーの高いところに広がった部分が $S'(\boldsymbol{k},\omega)$ で表されるスペクトルに対応し，$S'(\boldsymbol{k},\omega)$ の中心線第二ピーク ω_2と半値幅 (灰色部分) が 4·7 図に示されている。実際に測定されたスペクトルをみると，波数領域 (例えばフォノンの $k = 0.8\text{Å}^{-1}$，マクソンの $k = 1.1\text{Å}^{-1}$，ロトンの $k = 1.9\text{Å}^{-1}$) で異なるが，2 ないし 3 個の小さい山をともなった構造が現れる。これらは 2 個のロトン，ロトンとマクソン，2 個のマクソンの励起に対応すると解釈されている。

フォノン・ロトン・スペクトルの温度依存性[17)]　　最近の測定結果によると，フォノン領域とロトン領域とでは $S(\boldsymbol{k},\omega)$ の温度依存性に異なった特性が見られる。温度を上げていったとき，波数が $k \lesssim 0.8\text{Å}^{-1}$のフォノ



4·7 図　エネルギー・スペクトルの実測値。
図中の 1/2 は，第二ピーク (4·6 図参照) の半値幅の位置を示す。破線は自由粒子 $\hbar^2k^2/2m$ の放物線。2 種類の測定装置が用いられた。
RCS (rotating crystal spectrometer)
TACS (triple-axis crystal spectrometer)

ンの領域での $S(k,\omega)$ のピークは高さが減少するとともに幅が広がる傾向を示すが，T_λを越えてもピークは残り，しかもピークを示すエネルギーの位置はほとんど温度によらず一定である。$k \gtrsim 0.8$Å^{-1}のマクソンそしてロトン領域では，温度上昇にともない同様にピークの高さの減少と幅の増大があるが (ピークの位置は少し減少)，T_λでピークは消失し後には幅広い強度分布が残るのみである。これらの結果から H.R.Glyde ら[17),18)]は次のような考察を提唱した。

スペクトルは 1 本のつながったブランチに見えるが，上記 2 つの領域ではそれぞれ異なる物理的性質をもつと考える。そのため $S(k,\omega)$ を 2 つの部分 $S_{\rm sp}$と $S_{\rm zs}$の寄与にわける。k の小さい領域のフォノンは全粒子が参加する密度のゆらぎであり，これを支える平均的な力は粒子間に直接働く力学的なもので，これには粒子の統計性や温度は二義的にしか寄与しない。したがって $T_\lambda < T$の常流体にも Fermi 液体にも存在する集団運動であり，

ゼロ音波 (zero sound)[†] とよばれる寄与 S_{zs}がこれに相当する。$T_\lambda > T$の超流動相では凝縮体 ($T = 0$ で最大 $n_0 \simeq 0.1n$ となる) が現れ，そこからの一粒子 (single particle) 励起の寄与 S_{sp}が生ずる (その分 S_{zs}が減少)。ところが S_{sp}のスペクトルは S_{zs}と同じ励起エネルギーをもつため (前節でふれた Gavoret-Nozières の示したこと)，ピークの強度の一部として加わる。先に議論した Bogoliubov 理論でのフォノンは S_{sp}のスペクトルに相当する。

他方 $\boldsymbol{k}$の大きいロトン領域では，もともと凝縮体存在下での裸の一粒子励起が種々の波数のゼロ音波と結合し，混成 (hybridize) された結果，S_{sp}のピークとして現れたものと解釈する。したがって凝縮体がなくなる $T_\lambda < T$ では，このピークは消失し後にはこの $\boldsymbol{k}$ に対する幅広いゼロ音波の寄与のみが残る。このような描像は先の Feynman-Cohen のそれと基本的に同じもので，表現の違いはあれ以前からあった解釈である。ただ有限温度での具体的な計算はまだなされておらず，観測事実との比較は今後に残された問題である。

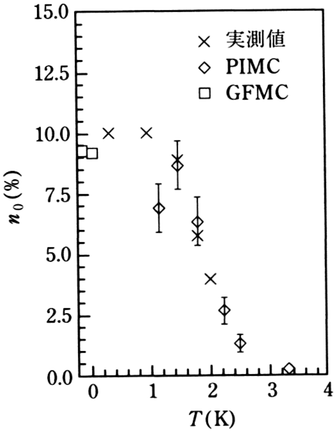
運動量分布 $n_{\boldsymbol{p}}$，凝縮体密度 n_0　　波数が大きくなって $k \gtrsim 3.5\text{Å}^{-1}$ となると，4·7 図に見られるようにロトンのスペクトルは消え，$S(\boldsymbol{k},\omega)$ のピークのエネルギーは ^{4}He 原子の自由スペクトル $(\hbar k)^2/2m_4$ (破線の放物線) に近くなっている。そしてピークのまわりの広い幅は粒子の零点運動による Doppler 効果に起因したものと解釈されている。

より大きい波数，$k \gtrsim 10\text{Å}^{-1}$ となるとこの傾向はさらに強まり，このような深非弾性 (deep inelastic) 散乱の解析には単純なインパルス近似 (Inpulse Approximation) が適用される。これは，中性子が液体ヘリウム原子を自由粒子として散乱するというもので，運動量変化 $\boldsymbol{k}$ に対しエネルギー変化は $(\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{k})^2/2m_4 - \boldsymbol{p}^2/2m_4$ となる。このとき $S(\boldsymbol{k},\omega)$ は

$$S_{\text{IA}}(\boldsymbol{k},\omega) = \int n_{\boldsymbol{p}}\,\delta\left(\omega - \frac{\hbar\boldsymbol{k}^2}{2m_4} - \frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{k}}{m_4}\right)d\boldsymbol{p}$$

と表される。ここで $n_{\boldsymbol{p}}$は自由粒子の運動量分布関数である。しかしこの近似がよいのは $k \to \infty$ の極限であり，実際に観測されている領域では完全な自由粒子の散乱とはみなせないで，その補正として終状態 (final state) 相互作用を考慮することが必要となる。これは散乱される状態に粒子間の

† Landau が Fermi 液体に対して，$T = 0$ でも存在する音波としてこの名称を始めて用いた (9–2 節参照)。その後 D.Pines は Bose 液体のヘリウムに対しても上記の意味からフォノンをゼロ音波とよんだ。

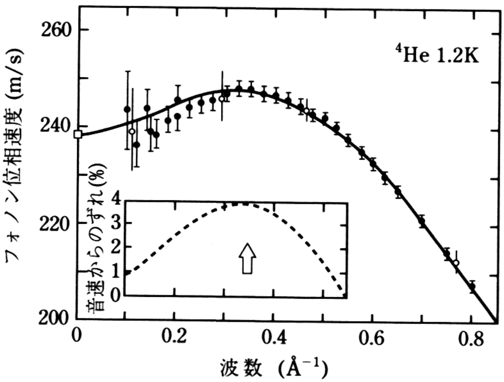


4·8 図 n_0の実測値と理論値。
◇，□の印は Monte Carlo 計算値
◇ PIMC (Path Integral Monte Carlo)[20]
□ GFMC (Green Function Monte Carlo)[21]

相互作用を取り込むことである。このような理論的修正に加えて，さらに装置の解像幅を考慮して観測された $S(k,\omega)$ から $n_{\boldsymbol{p}}$を求めるわけであるが，前者は $n_{\boldsymbol{p}}$ の積分で与えられており単純ではない。そこで $n_{\boldsymbol{p}}$ の形に何らかの仮定が必要となる。ここでは最近なされた P.E.Sokol と W.M.Snow[19] による解析について述べる。$\boldsymbol{p}$ の等方性，p の小さいところで $n_{\boldsymbol{p}}$ は p^{-2} の依存性 (フォノンの存在から理論的に示せる) をもつことを仮定する。そして $\boldsymbol{p}=0$ の凝縮体 $n_0(T)$ が存在するとき，$n_{\boldsymbol{p}}$の関数形として

$$n_{\boldsymbol{p}} = \begin{cases} n_0(T)\left(\delta(\boldsymbol{p}) + \dfrac{mc}{2np}\coth\left(\dfrac{cp}{2k_{\rm B}T}\right)\right) + A_1\exp\left(\dfrac{-p^2}{2\sigma_1^2}\right) & ;\ p \le p_{\rm c} \\ A_2\exp\left(\dfrac{-p^2}{2\sigma_2^2}\right) & ;\ p \ge p_{\rm c}. \end{cases}$$

を仮定する。ここで，$A_1, A_2, \sigma_1, \sigma_2$ そして $p_{\rm c}$ をパラメーターとして解析する。適当なパラメーターの値に対し $S(k,\omega)$ から求められた $n_{\boldsymbol{p}}$ は，Monte Carlo 計算[20),21)]の結果とよい一致を示す。さらに n_0の値に対しても 4·8 図[22)]に示すように実験から求められた $n_0(T)$ と理論値はほぼ一致している。Penrose-Onsager による n_0の評価以来，多くの理論的，実験的研究が



4·9 図　フォノンの位相速度の測定 (中性子散乱)。挿入図は音速 238.4m/s (□印) からのずれを%で表したもの。

なされてきたが，現時点でもやはり $n_0(0)/n \simeq 10\%$ というのが結論のようである。

フォノン・スペクトルの分散　フォノンのスペクトルは波数 k に比例して (4.15) のように与えられるとしたが，実は中性子散乱，熱パルスの実験で精細に調べると，音速 $c = 238.3\text{m/s}$ を係数とする直線からわずかではあるがはずれた曲線を描くこと，しかも，それが圧力に依存して変化することが判明している。4·9 図は飽和蒸気圧，$T = 1.2\text{K}$ での測定結果で位相速度 ε_k/k が k に対してプロットされている。これを見ると分散曲線は，音速 c を係数とする直線から少し上に膨らみ，$k = 0.5\text{Å}^{-1}$ を越したあたりで直線と交わり，それ以上の波数では直線の下側に下がりマクソンに向かう。H.J.Maris[23] はこの異常分散曲線を，$\gamma\,(>0)$, k_A, k_B のパラメータを用い

$$\varepsilon_k = ck\left(1 + \gamma k^2\,\frac{1-(k/k_\text{A})^2}{1+(k/k_\text{B})^2}\right),$$

により解析した (図の実線)。そしてパラメーターに対し $\gamma = 1.112\text{Å}^2, k_\text{A} = 0.542\text{Å}^{-1}, k_\text{B} = 0.332\text{Å}^{-1}$ を得た。圧力が 15 バールまで増すとこれらのパラメーターは変わり異常分散はなくなり，音速 $c = 323.2\,\text{m/s}$ の直線より下にくることが観測されている。Maris は分散が現れる理由，特に圧力依存性についての理論を提出している。

異常分散の結果は低温での比熱の温度依存性にも現れ，T^3 に比例する項 (4.20) に加えて T^5 に近似的に比例する小さな寄与がみられる。さらに重要

なことは，3-フォノン過程が起きやすくなることである。波数 $\boldsymbol{k}$ のフォノンが $\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2$ の 2 個のフォノンに崩壊する素過程 (あるいは逆過程) が許されるためには，運動量とエネルギーの保存則，$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2$，$\varepsilon_{\boldsymbol{k}} = \varepsilon_{\boldsymbol{k}_1} + \varepsilon_{\boldsymbol{k}_2}$ が要求されるが，異常分散があるときにはこれを満たす波数空間の体積が有限となる。分散のない $\varepsilon_{\boldsymbol{k}} = ck$ の場合には，2 つの保存則を満たす波数空間の体積は 1 つの直線になってしまい事実上ゼロである。分散があれば $T = 0$ でもフォノンは有限な寿命を持つことになるが，$T \neq 0$ ではさらに熱的な寿命が加わり，3-フォノン過程がさらに起きやすくなる。実際，極低温での超音波吸収に対する測定結果は，この過程で説明されている。

5. 二流体力学

超流動液体ヘリウムの特徴的な性質が二流体模型によりみごとに理解できることは2章でみた通りである。それではこの二流体性の本質が，量子力学的特性としてどのように理解できるのであろうか。始めに2–2節で述べた実験(I)——非古典的回転流——の問題に則して考察する。これは，流れ(定常的)てはいても熱平衡の理論を一般化して取扱うことができる。次いでこの二流体性が，4章で見てきた超流動相の基底状態，励起状態の特徴からどのように理解できるのか，Landauが最初に提唱した描像について述べることにする。また古典的な流体力学とはちがって，二流体の従う流体力学の方程式がどのように記述されるか，そして，何種類もの音波がなぜ存在できるのかなどを議論するのが，この章の目的である。

5–1 二流体性

非古典的回転流と二流体性[1]　2–2節で見たようにトーラス容器を一定の角速度 ω で回転させたとき，液体ヘリウムは熱浴である容器の壁と熱平衡を保っている。実験室系でのハミルトニアンには容器が回転すると，ヘリウム原子は容器の壁との相互作用により時間に依存するポテンシャル項 $\sum_i U(\boldsymbol{r}_i; t)$ がつけ加わり

$$H_{\mathrm{lab}} = H_0(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}) + \sum_i U(\boldsymbol{r}_i; t) \tag{5.1}$$

$$H_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}) = \sum_i \frac{p_i^2}{2m} + \sum_{i>j} V(|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|) \tag{5.2}$$

となる。一方，回転基準系でのそれは，プライムを付けた変数を用いて

$$H_{\rm rot} = H_0(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{p}') + \sum_i U(\boldsymbol{r}'_i) \tag{5.3}$$

となり，最後のポテンシャル項は時間には依存しなくなるため取扱いが簡単になる。さてここでの目的は，この多体系の量子力学的最低状態のエネルギー，あるいは有限温度での自由エネルギーが ω に対してどのような性質をもつかを調べることである。まず，量子力学の固有値問題を考える。その際，波動関数に対する境界条件は実験室系において課す。そのため (5.3) の $H_{\rm rot}$を実験室系での変数 $(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})$ で表して，回転による流れの状態を考察する。$\boldsymbol{p}'_i = m\boldsymbol{v}'_i = m(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i) = \boldsymbol{p}_i - m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i$，および $|\boldsymbol{r}'_i - \boldsymbol{r}'_j| = |\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|$ の関係を用いて，(5.3) は

$$\begin{aligned} H_{\rm rot}(\omega) &= \sum_i \frac{1}{2m}(\boldsymbol{p}_i - m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i)^2 + \sum_{i>j} V(|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|) \\ &= H_0 - \boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{L} + \frac{1}{2}I_{\rm c}\boldsymbol{\omega}^2 \end{aligned} \tag{5.4}$$

と書ける†。ここで H_0は $\boldsymbol{\omega} = 0$ のときのハミルトニアン (5.2)，$\boldsymbol{L}$ は角運動量 $\boldsymbol{L} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i$である。また $I_{\rm c}$は 2–2 節での議論に現れた古典的慣性モーメントで，$I_{\rm c} = mNR^2$である。

まずこの有効ハミルトニアン (5.4) に対する固有値問題を調べよう。その際トーラス容器中の粒子の位置座標を円筒座標，$\boldsymbol{r}_i = (\rho_i, \theta_i, z_i)$ で表すのが便利である。このとき 2–2 節で考えた容器のサイズに対する条件 $R \gg a$ を考慮すれば，$\rho_i \simeq R, z_i \simeq a$ と近似でき，θ_i のみを力学変数とみなすことができる。これに対応して，運動量演算子 $\widehat{\boldsymbol{p}}_i$ の代わりに角運動量演算子 $\boldsymbol{R}\times\widehat{\boldsymbol{p}}_i = \widehat{\boldsymbol{l}}_i$，$\boldsymbol{L} = \sum_i \widehat{\boldsymbol{l}}_i$を用いる。$N$体の波動関数，$\Phi(\theta_1, \cdots, \theta_N) \equiv \Phi(\theta)$ に対する固有値方程式は

$$\left(H_0 - \boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{L} + \frac{1}{2}I_{\rm c}\boldsymbol{\omega}^2\right)\Phi(\theta) = E(\omega)\,\Phi(\theta) \tag{5.5}$$

となる。古典的な回転エネルギー $I_{\rm c}\boldsymbol{\omega}^2/2$ は定数項であるが便宜上残しておく。ここで $\Phi(\theta)$ が一価関数であることによる境界条件として，

† 相互作用項 U は，容器の壁と液体ヘリウムが熱平衡を保つ働きをしているが，バルクの状態への寄与は小さいとして以下では無視する。

$$\Phi(\theta_1,\cdots,\theta_i+2\pi,\cdots,\theta_N)=\Phi(\theta_1,\cdots,\theta_i,\cdots,\theta_N) \tag{5.6}$$

を満たすことを要求する。これは，i 番目の粒子が他の粒子は固定したままトーラスを一周したとき，もとの状態に戻ることを意味する (single valuedness boundary condition 略して SVBC とよぶ)。さて $E(\omega)$ の性質を調べるために，(5.5) から $\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{L}$ の項を消去する変換，

$$\Phi'(\theta)=\exp\left(-i\frac{\omega}{\omega_0}\sum_i\theta_i\right)\Phi(\theta) \tag{5.7}$$

$$\omega_0=\frac{\hbar}{mR^2} \tag{5.8}$$

をする。$[\widehat{l}_i,\widehat{\theta}_j]=-\hbar\delta_{ij}$ に注意し，さらに変換により，$\widehat{l}_i\to\widehat{l}_i+\hbar\omega/\omega_0$ となることを考慮すれば，(5.5) は

$$H_0\Phi'(\theta)=E(\omega)\,\Phi'(\theta) \tag{5.9}$$

と変わるが，その際 (5.6) も変化して

$$\begin{aligned}\Phi'(\theta_1,\cdots,\theta_i&+2\pi,\cdots,\theta_N)\\&=\exp\left(-2\pi i\frac{\omega}{\omega_0}\right)\Phi'(\theta_1,\cdots,\theta_i,\cdots,\theta_N)\end{aligned} \tag{5.10}$$

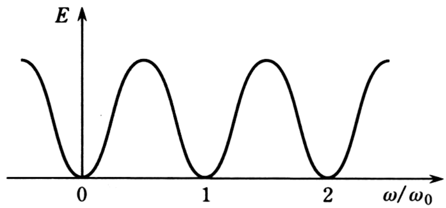
となる。ところで (5.9) は ω にはよらない H_0の固有値方程式であり，$E(\omega)$，そして Φ' が ω に依存するとすれば変化した SVBC (5.10) を通してのみである。ところが (5.10) は ωの値が $n\omega_0$(n は整数) 変化しても不変であり，その結果 $E(\omega)$ は $n\omega$ を周期とする周期関数となる；

$$E(\omega+n\omega_0)=E(\omega) \tag{5.11}$$

さらに容器の回転の向きを変えても固有値は不変 (時間反転不変性) であるから，$E(\omega)$ は $\boldsymbol{\omega}$ の偶関数としてよい。$E(\omega)$ の定性的な様子を 5·1 図に示す。

以上の議論を用いて始めに $T=0$ の場合を考えると，実現するのはエネルギーの最低状態である。(5.11) から回転のないときの $E(\omega=0)$ と，ω がちょうど $n\omega_0$のときの $E(n\omega_0)$ が等しくなり，これは流体が容器といっしょに回転している状態が，静止している状態と同等なことを意味している。さらにトーラス容器での超流動速度の量子化条件 (3.46)，$v_s=\kappa n/2\pi R$ と (5.8) を比較すれば，条件 $\omega=n\omega_0$は $R\omega=v_s$と書くことができ，壁と同じ速度の超流動流が実現していることに対応し，このときエネルギー最低の状態が実現していることになる。

回転速度 ωは任意の値をとれるので一般には $n\omega_0$とは一致しない。例え



5·1 図　角速度 ω に対する E の周期性と偶関数性

ば $(n-1/2)\omega_0 < \omega < (n+1/2)\omega_0$ のときを考える。このときでも回転基準系からみて超流動の流れのエネルギーが最小になるように，ω/ω_0 に最も近い n の値を持つ流れが実現すると考えることができる。もし十分小さな回転速度，$\omega \ll \omega_0/2$ の場合を考えると，$n=0$ つまり $\boldsymbol{v}_\mathrm{s}=0$ となり超流体は流れに参加しない。これが 2–2 節でみた実験 (I) の結果である (そこでの臨界角速度は $\omega_\mathrm{c}=\omega_0/2$ である)。逆に $\omega \gg \omega_0/2$ の場合には，n は十分大きな値をとり，それに対応した $\boldsymbol{v}_\mathrm{s}$ の流れが実現する。ここで実験 (II) のように容器の回転を止めたとき，なおこの流れが持続する準安定状態の問題については次章で述べる。これらの実験は実際には有限温度での角運動量の測定であるからその議論に進もう。

有限温度での熱平衡状態は，回転基準系での自由エネルギー F が最低という条件で表される。F は (5.4) を用いて

$$F(\omega) = -\beta^{-1}\log Z(\omega) \tag{5.12}$$

$$Z(\omega) = \mathrm{Tr}\,\exp\left[-\beta\left(\widehat{H}_0 - \boldsymbol{\omega}\cdot\widehat{\boldsymbol{L}} + \frac{I_\mathrm{c}\omega^2}{2}\right)\right] = \sum_n e^{-\beta E_n(\omega)} \tag{5.13}$$

と与えられる。この $F(\omega)$ に対しても，ω に対する 2 つの性質，(5.11) と同じ周期性と偶関数性が導かれる[2)]。実験室系での角運動量の平均値 $\overline{L}(\omega)$ は，

$$\begin{aligned}\overline{L}(\omega) &= \frac{1}{Z(\omega)}\sum_n L_n e^{-\beta E_n(\omega)} \\ &= -\frac{\partial F(\omega)}{\partial\omega} + I_\mathrm{c}\omega\end{aligned} \tag{5.14}$$

と与えられる。ここで L_n はエネルギー E_n の状態での角運動量の期待値で

ある。2行目は (5.12) をωで微分し，(5.13) を考慮することにより確かめられる。さらに角運動量に寄与する慣性モーメント I を

$$I = \left(\frac{\partial \overline{L}(\omega)}{\partial \omega}\right)_{\omega=0} = -\left(\frac{\partial^2 F(\omega)}{\partial \omega^2}\right)_{\omega=0} + I_{\mathrm{c}} \tag{5.15}$$

で定義しよう。もし $F(\omega)$ が ω に依存しなければ，$\partial F(\omega)/\partial\omega = 0$，したがって角運動量は古典的な振舞い，$\overline{L}(\omega) = I_{\mathrm{c}}\omega$ を与える。一方，超流動の特性である超流動密度 ρ_{s}を

$$\left(\frac{\partial^2 F(\omega)}{\partial \omega^2}\right)_{\omega=0} = \frac{\rho_{\mathrm{s}}}{\rho} I_{\mathrm{c}} \tag{5.16}$$

により定義する。そして$\rho - \rho_{\mathrm{s}} = \rho_{\mathrm{n}}$ で常流動密度を定義すれば，(2.1) の非古典的角運動量が得られる。先に述べた $F(\omega)$ の2つの性質と，$\omega = 0$ で最小値をとることを仮定すれば，$F(\omega)$ も ω に対して5·1図のような振舞いを想定できる。(5.16) は ω に関して，$F(\omega)$ がその最小値のまわりで正の曲率を持てば，それが超流動速度 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}$ に伴って流れる密度 ρ_{s} を決めることを意味している。このような超流動の特性が現れるためには，上で見てきたように量子的多体系の波動関数に課したSVBC (5.6) あるいは (5.10) が意味を持たねばならない。このためには1個の粒子を任意な経路に沿ってマクロな距離を1周させたとき，波動関数がゼロにはならないということが必要であり，それには多体系の波動関数が位相的な広がりを持つ (topologically extended) ことが重要である。これは多体粒子系において運動量空間でのBose 凝縮が起きていることと密接に関係している[1)]。

これまでの議論とは少し異なった視点から，二流体性そして超流動の特徴を論ずる仕方もある。そこでは，ハミルトニアン (5.4) にある $-\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{L}$ を，外部から系に及ぼした小さな摂動 (エネルギー) とみなし，それによる線形応答が観測される角運動量 $\overline{L}$ であると考える。あるいは，十分長いパイプ状容器の中の液体ヘリウムを考え，容器の壁を速度 $\boldsymbol{u}$ でゆっくりと動かしたとき，系には摂動エネルギー，$H_p = -\int \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})\,d\boldsymbol{r}$ が加わる。ここで $\boldsymbol{j}$ は運動量密度を表す量子力学的演算子であり，外場 $\boldsymbol{u}$ は古典量とする。この摂動による線形応答としてパイプ中に誘起される質量流の統計的平均値 $\overline{\boldsymbol{j}}$ が観測量と考える。いま，$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$ が直交座標で j方向にあるとき，$u_j(\boldsymbol{r})$ の Fourier 変換 $u_j(\boldsymbol{k})$ の外場による運動量密度の応答は，$\overline{j}_i(\boldsymbol{k}) = \chi_{ij}(\boldsymbol{k})u_j(\boldsymbol{k})$ と与えられる。ここで $\chi_{ij}(\boldsymbol{k})$ は $j_i(\boldsymbol{r})$ と $j_j(\boldsymbol{r}')$ の相関関数の $\chi_{ij}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$ Fourier 変換であり，一般に縦成分 $\chi_l(k)$，横成分 $\chi_t(k)$ を用いて

$$\chi_{ij}(\boldsymbol{k}) = \widehat{k}_i\widehat{k}_j\chi_l(k) + (\delta_{ij} - \widehat{k}_i\widehat{k}_j)\chi_t(k)$$

と表される ($\widehat{k}_i$は $\boldsymbol{k}/k$の i 成分)。二流体系での特徴は質量密度に対し

$$\lim_{k\to 0}\chi_l(k) = \rho, \qquad \lim_{k\to 0}\chi_t(k) = \rho_{\rm n}$$

の関係が成立することである。前者は一般の系で成立する f-sum rule (質量保存則から導かれるもので，(4.54) 式の別の表現) であるが，後者は常流動密度 $\rho_{\rm n}$が横成分，つまり $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{u}(\boldsymbol{k}) = 0$ を満たす外場の応答によることを表している。$\rho - \rho_{\rm n} = \rho_{\rm s}$を用いると，上式は

$$\lim_{k\to 0}\chi_{ij}(\boldsymbol{k}) = \delta_{ij}\,\rho_{\rm n} + \widehat{k}_i\widehat{k}_j\,\rho_{\rm s}$$

と書くことができる。$\rho_{\rm s}$の存在は $\chi_{ij}(\boldsymbol{k})$ が $k\to 0$ に際して等方的ではなく，$\chi_{ij}(k=0)$ が発散していることを意味する。これは $\chi_{ij}(\boldsymbol{k})$ の$\widehat{k}_i\widehat{k}_j$の部分の逆 Fourier 変換が，$\nabla_i\nabla_j(r^{-1}) = -r^{-3}(\delta_{ij} - 3r_ir_jr^{-2})$ となり，運動量の間に長距離の相関があることを表す。そしてこの長距離相関が実は，超流動の特性であり，秩序変数の位相変数の相関に基因していることも示される。ここでは結論のみを述べたが詳細については文献 3)，4) を参照されたい。ここで導入した $\rho_{\rm n}$を，励起量子の描像で表現したのが次節の Landau の議論である。

5–2 励起量子と二流体

Landau[5)]は常流動流の実体は励起量子の平均流であるという，本質的でしかも実用的な議論を提唱した。前節で考えたように，十分長いパイプ状の容器の中の流れを考える。これはトーラス容器の半径 R を無限に長くしたと考えればよい。超流動速度が秩序変数の位相の勾配に比例して，(3.40) で与えられることは先に見た。最初に $T=0$ としよう。凝縮体が速度 $\boldsymbol{v}_{\rm s}$で流れると，流体の全運動量密度 $\boldsymbol{j}$ は $\rho\boldsymbol{v}_{\rm s}$となる。全質量密度 ρ が寄与するのは，仮に最低状態にある凝縮体のみが一斉に $\boldsymbol{v}_{\rm s}$で流れるとしても，基底状態では全粒子の間に強い相関があり，凝縮体以外の粒子をも引きずって流れる結果であり，このことはすでに 4 章で議論した ((4.37) を参照)。有限温度になると，これも 4–2 節で述べたように運動量 $\boldsymbol{p}$，励起エネルギー$\varepsilon_{\boldsymbol{p}}$の励起量子 (フォノン，ロトン) が熱的に励起される。ただしこのスペクトルは流れのない状態でのもので，$\boldsymbol{v}_{\rm s}$の流れがあるときには，この速度で動く座標系 ($\boldsymbol{v}_{\rm s}$静止系とよぶ) でみた励起量子の運動量とエネルギーが $\boldsymbol{p}, \varepsilon_{\boldsymbol{p}}$ である。さらにパイプを速度 $\boldsymbol{u}$ で動かしたとする。このとき励起量子は容器の

壁との相互作用により，壁と熱平衡を維持すべく平均として $\boldsymbol{u}$ と同じ速度で流れるであろう。それが常流動速度 $\boldsymbol{v}_{\rm n}$ であり，$\boldsymbol{v}_{\rm s}$ とは独立な励起量子気体の平均流速である。このとき $\boldsymbol{v}_{\rm s}$ 静止系での運動量密度は相対速度 $\boldsymbol{v}_{\rm n}-\boldsymbol{v}_{\rm s}$ に比例して

$$\boldsymbol{j}_0=\rho_{\rm n}(\boldsymbol{v}_{\rm n}-\boldsymbol{v}_{\rm s}) \tag{5.17}$$

と与えられる。比例係数 $\rho_{\rm n}$ は常流動密度である。したがって実験室系での全運動量密度 $\boldsymbol{j}$ は

$$\boldsymbol{j}=\rho\boldsymbol{v}_{\rm s}+\boldsymbol{j}_0=\rho_{\rm s}\boldsymbol{v}_{\rm s}+\rho_{\rm n}\boldsymbol{v}_{\rm n} \tag{5.18}$$

となる。ここで $\rho-\rho_{\rm n}=\rho_{\rm s}$ は超流体密度で，2–3 節で議論した関係 (2.5) を与えることになる。(5.18) で $\boldsymbol{j}$ と $\boldsymbol{j}_0$ の関係は，実験室系と $\boldsymbol{v}_{\rm s}$ 静止系の間の Galilei 変換による関係を表している。

Landau はこの $\boldsymbol{j}_0$ に対して，励起量子の気体運動論を適用して具体的な表式を与えた。液体ヘリウムの入った容器とともに動く ($\boldsymbol{v}_{\rm n}$ 静止系) 観測者から見た励起エネルギー $\varepsilon'_{\boldsymbol{p}}$ は，$\boldsymbol{v}_{\rm s}$ 静止系での $\varepsilon_{\boldsymbol{p}}$ と Galilei 変換により

$$\varepsilon'_{\boldsymbol{p}}=\varepsilon_{\boldsymbol{p}}-\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{v}_{\rm n}-\boldsymbol{v}_{\rm s}) \tag{5.19}$$

の関係で与えられる。このとき $\boldsymbol{j}_0$ はこのスペクトルの励起量子気体が運ぶ平均運動量密度として，$\boldsymbol{j}_0=\sum_{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{p}\,n^0(\varepsilon'_{\boldsymbol{p}})$ と与えられる†。$n^0(\varepsilon'_{\boldsymbol{p}})$ は，(4.17) の流れがないときの熱平衡分布 $n^0(\varepsilon_{\boldsymbol{p}})$ において，$\varepsilon_{\boldsymbol{p}}$ の代わりに $\varepsilon'_{\boldsymbol{p}}$ を代入したものである。これは $\boldsymbol{v}_{\rm n}$ で動く容器と熱平衡にある分布で，流体力学の変数 $\boldsymbol{v}_{\rm n}-\boldsymbol{v}_{\rm s}$ を含む局所平衡分布関数である。$\boldsymbol{j}_0$ の i 方向の成分は，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{j}_{0i}&=\sum_{\boldsymbol{p}}p_i\left[\exp\left(\frac{\varepsilon_{\boldsymbol{p}}-\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{v}_{\rm n}-\boldsymbol{v}_{\rm s})}{k_{\rm B}T}\right)-1\right]^{-1}\\&=-\frac{1}{k_{\rm B}T}\sum_{\boldsymbol{p}}p_i\frac{\partial n_0(\varepsilon_{\boldsymbol{p}})}{\partial\varepsilon_{\boldsymbol{p}}}\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{v}_{\rm n}-\boldsymbol{v}_{\rm s})\end{aligned} \tag{5.20}$$

と与えられる。最後の表式では，$|\boldsymbol{v}_{\rm n}-\boldsymbol{v}_{\rm s}|$ が十分小さい ($\varepsilon_{\boldsymbol{p}}/p$ に比べ) として展開し一次の項のみを残したものである。ここで流体の等方性を仮定し，(5.17) と比較すれば

$$\rho_{\rm n}=-\frac{1}{3k_{\rm B}T}\sum_{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{p}^2\frac{\partial n_0(\varepsilon_{\boldsymbol{p}})}{\partial\varepsilon_{\boldsymbol{p}}} \tag{5.21}$$

† これはすでに 4 章の (4.38) で，Bogoliubov 近似の範囲ではあるが導いたものである。

が得られる。$\varepsilon_{\boldsymbol{p}}$ にフォノン，ロトンのスペクトル (4.15)，(4.16) を用いて (5.21) を計算すると，

$$\rho_{\rm n,ph} = \frac{2\pi^2(k_{\rm B}T)^4}{45\hbar^3 c^5} \tag{5.22}$$

$$\rho_{\rm n,r} = \frac{2\,p_0^4}{3(2\pi)^{3/2}\hbar^3}\left(\frac{\mu}{k_{\rm B}T}\right)^{1/2} e^{-\Delta/k_{\rm B}T} \tag{5.23}$$

となり，2·3(a) 図の実験値と驚くほど良い一致を示す。

4–2 節で見たように，熱平衡状態での性質は，熱的に励起された励起量子の気体により支配されていたが，常流動の流れもインコヒーレントな熱運動をしている励起量子の気体の平均流により表されることがわかった。これは通常の気体運動論と同様に，この流れがエントロピーを担い，また粘性を持つことも理解できよう。一方，$\rho - \rho_{\rm n} = \rho_{\rm s}$の密度を持つ超流体の流れは，一つの量子状態，運動量 $m\boldsymbol{v}_{\rm s}$に凝縮したヘリウム原子のコヒーレントな運動である。この秩序性のためエントロピーはゼロであり，そして粘性を持たない。

5–3　二流体の流体力学

前節までは二流体の性格についての議論であったが，ここでは二流体系の運動，なかでも流体力学の方程式がどのような構成をとるかについての議論に進む。流体力学で注目する運動は，熱平衡に十分近い状態に対するもので，自由度として選ばれる局所的物理量の空間，時間的変動が緩やかな場合である。したがって古典的流体と同様に，流体全体に対する 3 つの保存量 (以下ではすべて密度をとる)，質量 ρ，運動量 $\boldsymbol{j}$，そしてエネルギー E の保存則がまず要求される。ただ今までの議論から明らかなように，二流体系は凝縮体と励起量子気体の共存した系とみなす点で，凝縮のない流体分子の集団である古典的流体とは異なる。それゆえ，注目する自由度と流体力学成立の条件については検討が必要である。いま流体力学で問題とする時間スケールを t_H とし，そして励起量子 (フォノン，ロトン) の平均衝突時間 (これは局所平衡への緩和時間のめやすとなる) τ_e が，$t_H \gg \tau_e$ を満たすことが要求される。次に凝縮体に対しては，それを特徴づける秩序変数の 2 つの自由度 (振幅と位相) がある。まず振幅あるいはその 2 乗である凝縮体の密度 $n_0(\boldsymbol{r},t)$ は独立した流体力学の自由度にとる必要はない。それは次のような理由による。n_0 はその局所平衡値 n_0^{le} へ極めて短い緩和

時間τ_c ($t_H \gg \tau_c$ を満たす) で緩和し，その結果 $n_0 \sim n_0^{le}$ は他の自由度 ρ とエントロピー S (後述) により表され，独立な変数ではなくなる†。一方，秩序変数の位相は，(3.40) で定義したように，その勾配が超流動速度場 $\boldsymbol{v}_s$ を表し準保存量のように振舞う。

これらの自由度に対する流体力学方程式の系統的な導出にはいくつかの方法[4),7)] があるが，ここでは二流体力学を最初に議論した I.M.Khalatonikov[8)] の形式による。ただその導出の道筋と原理については補遺 5 に概略することにして，以下には結論のみを記述する。流体力学的な現象は 2 章で挙げたものも含め非常に多彩であるが，ここでは二流体力学に特有ないくつかの音波の議論のみをとりあげることにする。

流体力学方程式　以上の議論から自由度として，質量密度 ρ，運動量密度 $\boldsymbol{j}$，エネルギー密度 E，超流動速度 $\boldsymbol{v}_s$を選ぶことになるが，ここではエネルギー E の代わりに，それに寄与する熱力学的変数のエントロピー密度 S をとることにする。それらの保存則そして運動方程式を書き下すと，

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{j} = 0 \tag{5.24}$$

$$\frac{\partial j_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r_j}\left(\Pi_{ij} + \Pi'_{ij}\right) = 0 \tag{5.25}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_s}{\partial t} + \nabla\left(\mu + \frac{1}{2}v_s^2 + h'\right) = 0 \tag{5.26}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot \left(S\,\boldsymbol{v}_n + \boldsymbol{J}'_S\right) = \frac{R}{T} \tag{5.27}$$

となる。(5.27) ではエントロピーが常流動のみにより運ばれることを別にすれば，一般に非可逆過程によるエントロピー生成率 R/T (≥ 0) が存在し，それが上の 3 式に含まれる散逸項 (プライムを付した)$\Pi'_{ij}, h', \boldsymbol{J}'_S$ により表されることは，通常の流体力学と同様である。散逸項の具体的な形と R への寄与の仕方については補遺 5 で議論することにする。ただ超流動といえどもそれが一様な流れでなければ，(5.26) のような h' による散逸は許されることに注意しよう。この項 ($\nabla h'$) が存在しても渦度はゼロ ($\nabla \times \boldsymbol{v}_s = 0$) である。渦度が存在するときには新たな散逸項の寄与が生じる。これについては 7 章で議論する。

先に述べたように，独立な自由度としてあらわにはとらないので E の保

---

† 3 章で議論した近似の範囲では，(3.39) 式のように n_0 の保存則があたかも成立しているように見えるが，より正確な議論によると，(3.39) には $(n_0 - n_0^{le})/\tau_c$ の緩和項が存在することが示される[6),7)]。

存則 (補遺 5 の (5)) は書かれていないが，むしろそれを満足することを要請し，さらに Galilei 相対性を考慮することから，以下のように方程式の具体的内容が二流体の変数を用いて表されることになる (補遺 5 参照)：

$$\rho = \rho_{\mathrm{n}} + \rho_{\mathrm{s}} \tag{5.28}$$

$$\boldsymbol{j} = \rho_{\mathrm{s}}\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}} + \rho_{\mathrm{n}}\boldsymbol{v}_{\mathrm{n}} \tag{5.29}$$

$$\Pi_{ij} = P\,\delta_{ij} + \rho_{\mathrm{s}}\,v_{\mathrm{s}i}v_{\mathrm{s}j} + \rho_{\mathrm{n}}\,v_{\mathrm{n}i}v_{\mathrm{n}j} \tag{5.30}$$

(5.28)，(5.29) はすでに前節で導入したものである。(5.17) によりρ_{n}が定義され，(5.28) によりρ_{s}が定義されたと考える。(5.17) は v_{s}静止系でのベクトル量は一般に相対速度 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{n}} - \boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}$ に依存すべきという Galilei 相対性の要請の一例であり，(5.30) のΠ_{ij} の表式において，2 つの速度に依存するテンソル (第 2，3 項) を決めるときにも適用されている。P は等方的な圧力である。

$\boldsymbol{v}_{\mathrm{n}}$ の運動方程式は，独立ではなく上には現れていないが，それは (5.24) から (5.26) を差し引くことにより導くことができ，

$$\begin{aligned}\rho_{\mathrm{n}}\left[\frac{\partial \boldsymbol{v}_{\mathrm{n}}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}_{\mathrm{n}}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_{\mathrm{n}}\right]& \\ = -\nabla P + \rho_{\mathrm{s}}\nabla\mu + \eta_{\mathrm{n}}\nabla^2\boldsymbol{v}_{\mathrm{n}} - \Gamma(\boldsymbol{v}_{\mathrm{n}} - \boldsymbol{v}_{\mathrm{s}})&\end{aligned} \tag{5.31}$$

となる。ここでは h'は省略し，Π'_{ij} を含む散逸項は，補遺 5 で導入した粘性項 (23) で表した。また

$$\Gamma = \frac{\partial \rho_{\mathrm{n}}}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho_{\mathrm{n}}\boldsymbol{v}_{\mathrm{n}}) = -\left[\frac{\partial \rho_{\mathrm{s}}}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho_{\mathrm{s}}\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}})\right] \tag{5.32}$$

であり，これは常流体の超流体への転化率を表している。例えば系の温度を一様に上げたときの常流体の増加率を表す。そして (5.31) では全体の運動量を保存しながら常流体の運動量変化に寄与するものである。ただこの項の寄与を直接示すような実験が存在しているのかどうか，必ずしも明らかではない。以下では $\Gamma = 0$ の場合を考える。次に化学ポテンシャルμ に対する Gibbs-Duhem の式 (2.10) を拡張した熱力学的関係式，

$$d\mu = \frac{1}{\rho}dP - \sigma\,dT - \frac{\rho_{\mathrm{n}}}{2\rho}d(\boldsymbol{v}_{\mathrm{n}} - \boldsymbol{v}_{\mathrm{s}})^2 \tag{5.33}$$

に注目する。この式は超流動の流れに対して，常流動が相対的に流れるときの運動エネルギーの寄与を考慮したものである。これを用いて (5.31) は

$$\rho_{\mathrm{n}}\left[\frac{\partial \boldsymbol{v}_{\mathrm{n}}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}_{\mathrm{n}}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_{\mathrm{n}}\right] = -\frac{\rho_{\mathrm{n}}}{\rho}\nabla P-\rho_{\mathrm{s}}\sigma\nabla T-\frac{\rho_{\mathrm{n}}\rho_{\mathrm{s}}}{2\rho}\nabla(\boldsymbol{v}_{\mathrm{n}}-\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}})^2+\eta_{\mathrm{n}}\nabla^2\boldsymbol{v}_{\mathrm{n}} \tag{5.34}$$

となる。(5.26) も (5.33) および恒等式 $(1/2)\nabla\boldsymbol{v}^2=(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{v})$ を用いて

$$\rho_{\mathrm{s}}\left[\frac{\partial \boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}\right] = -\frac{\rho_{\mathrm{s}}}{\rho}\nabla P+\rho_{\mathrm{s}}\sigma\nabla T+\frac{\rho_{\mathrm{n}}\rho_{\mathrm{s}}}{2\rho}\nabla(\boldsymbol{v}_{\mathrm{n}}-\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}})^2 \tag{5.35}$$

と書くことができ，(2.8) の一般化になっている。上の 2 つの式を見ると，圧力勾配は $\rho_{\mathrm{n}},\rho_{\mathrm{s}}$ の比率で各々の流体に働くのに対し，温度勾配は同じ力が反対方向に作用しており，二流体力学の特徴が現れている。

5–4 いろいろな音波

液体ヘリウムで見られる流体現象の中で最も顕著なものは，何種類もの音波の存在であろう。前節の流体方程式に基づいて順次それらの特性を調べることにする。

第一および第二音波 2–6 節でも述べたように，通常の流体では音波は，密度あるいは，それに伴う圧力のゆらぎの伝播であるが，二流体ではそれに加えて，エントロピーあるいは温度のゆらぎが伝播可能である。したがってそれらを区別して，前者を第一音波，後者を第二音波とよぶ。ここでは簡単のため散逸項 (したがって音波の減衰) を無視する。そして $\boldsymbol{v}_{\mathrm{n}},\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}$ を 1 次の微小量として，線形近似をとる。まず 2 つの保存則

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\nabla\cdot\boldsymbol{j} \tag{5.36}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{j}}{\partial t}=-\nabla P \tag{5.37}$$

から

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}=\nabla^2 P \tag{5.38}$$

を得る。次にエントロピー $S=\rho\sigma$ (σ は単位質量当たりのエントロピー) に対する (5.27) は散逸項を無視しているので

$$\frac{\partial\rho\sigma}{\partial t}=\nabla\cdot(\rho\sigma\boldsymbol{v}_{\mathrm{n}}) \tag{5.39}$$

と保存則の形をとる。これに (5.24)，(5.29) を用いて

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = -\frac{\rho_s \sigma}{\rho} \nabla \cdot (\boldsymbol{v}_n - \boldsymbol{v}_s) \tag{5.40}$$

を得る。一方，線形化した (5.34)，(5.35) は

$$\rho_n \frac{\partial \boldsymbol{v}_n}{\partial t} = -\frac{\rho_n}{\rho} \nabla P - \rho_s \sigma \nabla T \tag{5.41}$$

$$\rho_s \frac{\partial \boldsymbol{v}_s}{\partial t} = -\frac{\rho_s}{\rho} \nabla P + \rho_s \sigma \nabla T \tag{5.42}$$

となる。この式から ∇P を消去すれば

$$\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{v}_n - \boldsymbol{v}_s) = -\frac{\rho \sigma}{\rho_n} \nabla T \tag{5.43}$$

の関係を得る。これは温度勾配が相対的な流れを駆動することを表しており，二流体の特性である。(5.40)，(5.43) から

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = \frac{\rho_s \sigma^2}{\rho_n} \nabla^2 T \tag{5.44}$$

を得る。ここで P, T を各々，ρ および σ の関数とみなして

$$\nabla P = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_\sigma \nabla \rho + \left(\frac{\partial P}{\partial \sigma}\right)_\rho \nabla \sigma \tag{5.45}$$

$$\nabla T = \left(\frac{\partial T}{\partial \rho}\right)_\sigma \nabla \rho + \left(\frac{\partial T}{\partial \sigma}\right)_\rho \nabla \sigma \tag{5.46}$$

と表せば，(5.38)，(5.44) は最終的に ρ と σ の連立波動方程式，

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_\sigma \nabla^2 \rho + \left(\frac{\partial P}{\partial \sigma}\right)_\rho \nabla^2 \sigma \tag{5.47}$$

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = \frac{\rho_s \sigma^2}{\rho_n} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial \rho}\right)_\sigma \nabla^2 \rho + \left(\frac{\partial T}{\partial \sigma}\right)_\rho \nabla^2 \sigma\right] \tag{5.48}$$

として表される。そこで ρ, σ が平衡値 ρ_0, σ_0 のまわりに振動数 ω，波数 k で x 方向に伝播する平面波

$$\rho = \rho_0 + \rho' \exp[i(\omega t - kx)],$$

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma' \exp[i(\omega t - kx)]$$

を考えれば，連立波動方程式の ρ', σ' に対する分散式は，$c \equiv \omega/k$ として

$$\left[1-\left(\frac{c}{c_1}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{c}{c_2}\right)^2\right]$$
$$=\left(\frac{\partial P}{\partial \sigma}\right)_\rho\left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_\sigma\left(\frac{\partial T}{\partial \rho}\right)_\sigma\left(\frac{\partial \sigma}{\partial T}\right)_\rho \tag{5.49}$$
$$=1-\frac{C_V}{C_P}$$

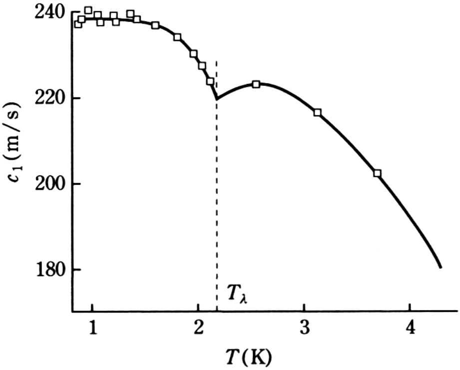
となる。ここで

$$c_1^2=\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_\sigma=\frac{1}{\rho\kappa_\sigma} \tag{5.50}$$

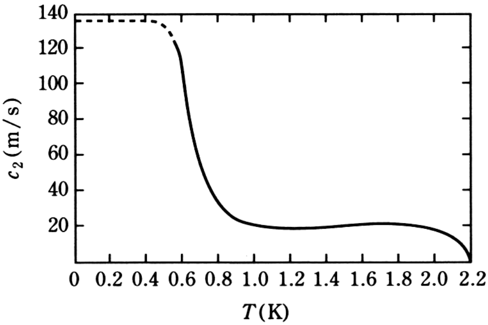
$$c_2^2=\frac{\rho_s\sigma^2}{\rho_n}\left(\frac{\partial T}{\partial \sigma}\right)_\rho=\frac{\rho_s\sigma^2 T}{\rho_n C_V} \tag{5.51}$$

である。ここでは平衡値の添え字 0 は省略した。また κ_σ, C_V は各々断熱圧縮率，定積比熱である。(5.49) 右辺の 2 行目は熱力学的な関係式により得られる。液体ヘリウムでは C_V と C_P は極めて近い値であることが知られており，(5.49) の右辺は事実上ゼロとしてよい。これは (5.47) において右辺の第 2 項を無視した密度 ρ の波動方程式，そして (5.48) では第 1 項のないエントロピーσ の波動方程式が独立に成立することに相当する。したがって密度波は音速 c_1の第一音波で，圧力勾配が復元力 ($\nabla T \sim 0$) であり，通常の流体にも存在する音波である。二流体では 2 つの速度場が同位相 ($\rho_n v_n = \rho_s v_n$) で振動していることは (5.41)，(5.42) から明らかである。一方，エントロピー波は音速 c_2 の第二音波で，温度勾配が復元力 ($\nabla P \sim 0$) となる。通常の流体ではエントロピーは熱拡散 (ここでは省略した熱伝導 (補遺 (25)) による散逸) を示すのみで，波動としては伝播しない。第二音波では密度ゆらぎはなく ($\rho' \sim 0$)，2 つの速度場は (5.36) から見られるように，反対位相 ($\rho_n \boldsymbol{v}_n + \rho_s \boldsymbol{v}_s = 0$) で振動している。

飽和蒸気圧のもとで実験的に測定された c_1 の温度依存性は 5·2 図[9]に示される。低温では一定値 238m/s に近づくが，T の上昇にともないわずかに減少し，T_λ でカプス状に最小値をとる。第二音波の測定は V.P.Peshkov[10]により始めてなされた。共振器の中でヒータにより励起された温度の定常波を用いた。c_2 の温度依存性は 5·3 図[11]に示されるように，T_λ に向けてゼロになる。これは (5.51) が因子 $(\rho_s/\rho_n)^{1/2}$ を含むことと一致している。c_2 の測定は，(5.51) に含まれる因子 (σ, C_V) を既知量とすれば，ρ_s,ρ_n の測定に利用できる。実際 T が T_λ に近づくとき，$C_V(\simeq C_P)$ とρ_s の温度変化



5·2図 第一音波の音速 c_1 の測定値



5·3図 第二音波の音速 c_2 の測定値

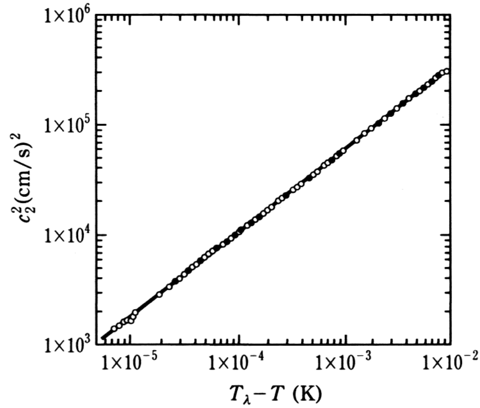
を反映した c_2 の振舞いを 5·4 図[12]に挙げる。ρ_s は臨界現象のスケーリング則†から得られる結果

$$\frac{\rho_s}{\rho} = k\left(\frac{T_\lambda - T}{T_\lambda}\right)^{2/3} \tag{5.52}$$

(k は定数) と非常によい一致を示している。

ここで励起量子フォノンと第一，第二音波とのかかわりについて付言し

† これは，$d\zeta = 2 - \alpha$ と書かれ，Josephson のスケーリング則[13]とよばれる。ここで d は空間の次元で，今は $d = 3$，ζ，α は ρ_s，C_p の臨界指数である。補遺 1 で見たように $\alpha \simeq 0$ とおけば，$\zeta = 2/3$ となる。



5·4 図 c_2 の T_λ 近傍の温度変化

ておく。4 章で議論したように，励起エネルギーが $\omega_k = ck$ で与えられるフォノンは，やはり音速 c の密度波である。そして中性子散乱による動的構造因子 $S(k, \omega)$ の測定から c は求められる。同じ密度波ではあるが，フォノンでは問題とする波長 k^{-1} は微視的長さであり，振動数も高く $\omega\tau_e \gg 1$ を満たす領域が対象である。ここで τ_e は前節の始めに述べた励起量子の衝突時間あるいは寿命である。そしてときにはゼロ音波† とも称される。一方，振動数 ω の流体力学的音波では，熱的に励起されたフォノン，ロトンからなる気体が，$\omega\tau_e \ll 1$ の条件を満たして局所平衡分布にある。この常流体と超流体の全体系に起きる密度波が第一音波で，c_1 は圧縮率により (5.50) で与えられる。フォノンの音速 c も 4 章で議論したように，粒子間斥力による圧縮率で決まり，$T \to 0$ では第一音波は存在できず，フォノン (ゼロ音波) のみとなる。他方，局所平衡にある励起量子の気体はエントロピーを担っており，この気体の密度分布が温度の変動に伴って空間，時間的に振動する波が第二音波である。実際，励起量子の密度分布関数に対する気体運動論[14)]により，第二音波は導出されるが，特にフォノンのみが励起されている低温では，その音速は $c_2 = c/\sqrt{3}$ となることが示される。これは (5.51) の熱力学的諸量をフォノンの熱平衡分布を用いて計算することによっても確かめられる。ただ実験的には，温度が 0.5K 以下で音速の値が $c_2 = c/\sqrt{3} \simeq 140\text{m/s}$ に接近することは確認されていない。5·3 図の点線

† 64 ページの脚注参照。

の行先について，いくつかの測定はあるが必ずしも一致してはいない。低温ではフォノンの平均衝突時間が長くなり，$\omega\tau_e \ll 1$ の条件が満たされなくなる。その結果フォノン気体の局所平衡が成立しなくなり，流体力学的な第二音波としては存在できなくなる。上記の実験結果は，この事情によるものと考えられる。

音波の名称の順番に従えば，次は第三音波であるがそれは最後に回して，上記 2 つの音波と密接な関係にある第四，第五音波の話を先にする。ただ第三音波も含めて，以下の波はすべて，常流体の流れは起きない ($\boldsymbol{v}_\mathrm{n} = 0$) 状況でのものである。

第四音波　この波はスーパーリーク中を伝わるもので，やはり超流動固有の音波である。径の細い管の中，あるいは微粒子を充点した細隙中では，常流体は粘性のために固体壁に付着して流れない。したがって振動する速度場は超流動速度のみで ($\boldsymbol{v}_\mathrm{n} = 0$) ある。このときの運動は

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_\mathrm{s} \boldsymbol{v}_\mathrm{s}) = 0 \tag{5.53}$$

$$\rho_\mathrm{s} \frac{\partial \boldsymbol{v}_\mathrm{s}}{\partial t} + \nabla \mu = 0 \tag{5.54}$$

$$\frac{\partial \rho\sigma}{\partial t} = 0 \tag{5.55}$$

で記述される。運動量 $\boldsymbol{j}$ は今は保存せず，常流動速度の自由度が消えたことに対応して運動量の保存則は姿を消した†。上式を線形化して得られる波動が第四音波で，その音速は $s = \rho\sigma$ を一定として

$$c_4^2 = \rho_\mathrm{s} \left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)_{\rho\sigma} = \frac{\rho_\mathrm{s}}{\rho} c_1^2 + \frac{\rho_\mathrm{n}}{\rho} c_2^2 \tag{5.56}$$

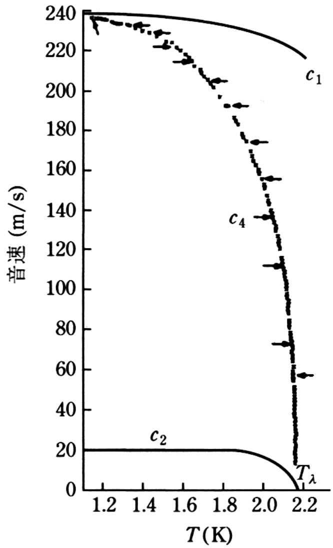
と与えられる。ここで熱力学的関係式 ((5.33) を参照)

$$\left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)_{\rho\sigma} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{\rho\sigma} - \sigma \left(\frac{\partial T}{\partial \rho} \right)_{\rho\sigma} \tag{5.57}$$

そして近似式

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{\rho\sigma} \simeq \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{\sigma}, \qquad \left(\frac{\partial T}{\partial \rho} \right)_{\rho\sigma} \simeq -\frac{\sigma}{\rho} \left(\frac{\partial T}{\partial \sigma} \right)_{\rho} \tag{5.58}$$

† この記述は次のような形式によっても再現できる。先の音波の議論に用いたのと同じ基礎方程式をすべてとるが，ただ運動量 $\boldsymbol{j}$ の非保存を表す抵抗力，$-\rho_\mathrm{n}\boldsymbol{v}_\mathrm{n}/\tau$ (τ は緩和時間) を，(5.54) の右辺に付加する。そして得られた結果に対して，$\omega\tau \to 0$ をとる。



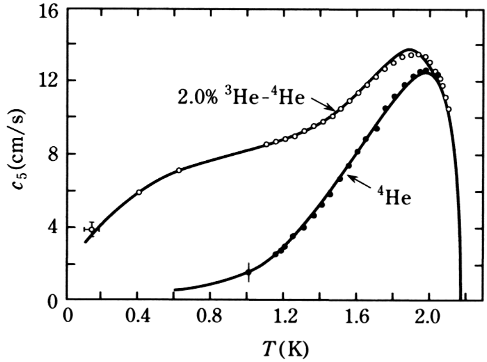
5·5 図 第四音波の音速 c_4 の温度変化。点が測定値。矢印は c_1, c_2, ρ_s/ρ, ρ_n/ρ の実験値を (5.56) に用いた計算値。

を用いた。c_4 は第一音波の速度 c_1^2 と第二音波の c_2^2 の ρ_s, ρ_n の加重平均で与えられるが，T_λ のごく近くを除けば，密度波の性格を持つ。実測された c_4 の温度依存性[15] は 5·5 図に見られるように，(5.56) の表式に c_1, c_2, ρ_s, ρ_n の測定値を用いて得られた値 (図の矢印の点) とよい一致を示している。

一様な定常流があるときには音波は Doppler 効果により，音速のシフトを受ける。ここでは，超流動の定常流 v_s^0 があるときの第四音波の Doppler シフトを求めておく。そのためには今まで無視してきた速度の 2 乗の項を考慮する必要がある。主要な寄与は，$\nabla(\mu + v_s^2/2)$ における 2 乗の項および μ 自身の v_s^2 による項 ((5.33) を参照) からくる。$\boldsymbol{v}_s = \boldsymbol{v}_s^0 + \boldsymbol{v}_s'$ とおき，音波による $\boldsymbol{v}_s'$ について線形近似をするのは前と同じである。計算の詳細は省略して結論を記すと，

$$c_4 = (\rho_s/\rho)v_s^0 \pm c_{4,0} \tag{5.59}$$

となる。ここで $c_{4,0}$ は定常流がないときの音速 (5.56) である。この結果は



5·6 図 第五音波の音速 c_5 の温度変化。
純 ^{4}He と ^{3}He–^{4}He の混合液。

次章で述べる，超流動永久流 v_s^0 の測定に利用された。

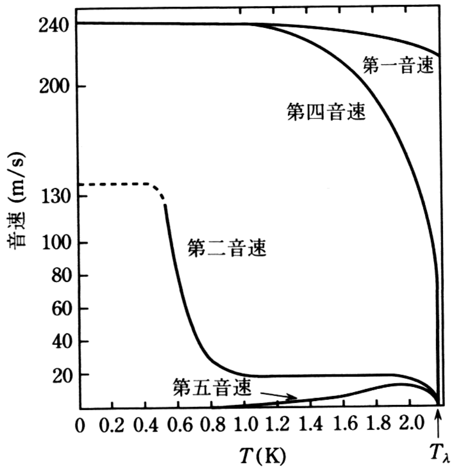
第五音波 第四音波の音速 (5.56) は，上に述べたように第 1 項の寄与が主要で密度 (圧力) 波であったが，その伝播を押さえ第 2 項のみを音速とする波を実現したものが第五音波[16),17)]である。したがってその音速は

$$c_5^2 = \frac{\rho_\mathrm{n}}{\rho} c_2^2 = \frac{\rho_\mathrm{s}\sigma^2 T}{\rho C_V} \tag{5.60}$$

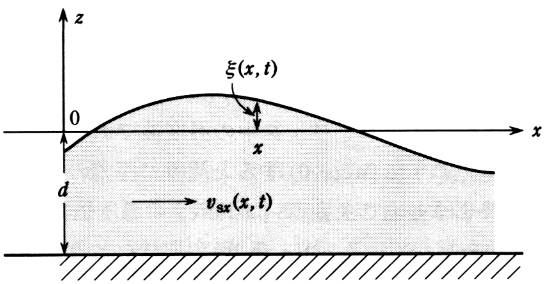
で与えられる。これはスーパーリーク中の温度波であり，第二音波において常流体が流れないように ($\boldsymbol{v}_\mathrm{n} = 0$) すると同時に圧力の振動が起きないような境界条件を課せば実現できる。5·6 図は c_5 の温度依存性の測定値[16)]で (5.60) とよい一致を示している (^{3}He が 2%含まれたときの測定曲線も載せてある)。5·7 図[†]は第三音波を除く 4 つの音波の音速の振舞いを定性的にまとめたものである。

第三音波[19),20)] 2 章で説明したように，固体の基盤上につくられた液体ヘリウムの薄膜では，常流体は動くことができず超流体のみが流れる。第三音波はこの薄膜の表面波である。流体と熱平衡にあるヘリウムの気体が飽和蒸気圧では膜厚は 20〜 30nm であるが，不飽和になると膜の厚さも変化し，したがって第三音波の振舞いも違ってくる。古典流体の表面波，例えば浅瀬での水面波では，復元力として重力 (時には表面張力も) が働くが，液体ヘリウムでは基盤を構成している固体分子からの van der Waals 引力

† I.Rudnick による音波についての総合報告[18)] の中にある。



5·7 図 4 種の音波のまとめ



5·8 図 膜厚 d の表面波

が主要な寄与をする。

膜に対し垂直に z 軸，平行に x-y面をとる。波は x 方向に進行するとして，y 方向には一定の幅 w をとり，一様な場合を想定する。このときには x-z 面内での波を考えればよい (5·8 図)。基盤から膜厚 d の平面を $z=0$ とし，そこからの表面の変位を図のように $\xi(x,t)$ とする。超流動速度は x 成分のみで z には依存しないとする。以下では膜厚 d に比べて十分長い波長の場合を考える ($1 \gg kd$)。

始めに温度変化を無視する近似での議論をしておく。これにより表面波の取り扱いは簡単になり，しかも第三音波伝播の主要な機構は理解できる。まず質量保存則 (5.36) を x 方向の間隔 dx，y方向の幅 w，高さ $d+\xi$ の板状 (スラブ) の体積について積分すると

$$\rho\frac{\partial\xi}{\partial t}+\rho_{\mathrm{s}}d\frac{\partial v_{sx}}{\partial x}=0 \tag{5.61}$$

となる。ここで非圧縮性 ($\rho=$一定) を仮定し，ρ_{s} は膜の厚さにわたっての平均値と考える。$\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}$ の運動方程式は，z 方向 (その単位ベクトルを $\hat{\boldsymbol{z}}$ とする) に働く van der Waals 引力 f (単位質量当たり) を考慮して

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}}{\partial t}=-\nabla\mu-f\hat{\boldsymbol{z}} \tag{5.62}$$

と書くと，膜に平行な x 成分は

$$\frac{\partial v_{sx}}{\partial t}=-\frac{\partial\mu}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}+\sigma\frac{\partial T}{\partial x} \tag{5.63}$$

となる。一方，膜に垂直な z 方向に対しては，流れ $v_{\mathrm{s}z}$ はなく，温度変化も無視できるとしているから，

$$\frac{\partial\mu}{\partial z}+f=\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}+f=0,\quad \frac{\partial T}{\partial z}=0 \tag{5.64}$$

が成立している。(5.64) の最初の式を積分し，流体表面での圧力は気相の圧力 P_g に等しいという条件を課せば，圧力は

$$P(x,z,t)=\rho\int_z^{\xi(x,t)}f(z')dz'+P_g \tag{5.65}$$

と表される†。したがって

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\rho f(d)\frac{\partial\xi}{\partial x} \tag{5.66}$$

を得る。これを (5.63) に用い，温度勾配は無視すれば，

$$\frac{\partial v_{\mathrm{s}x}}{\partial t}=-f(d)\frac{\partial\xi}{\partial x} \tag{5.67}$$

となる。(5.61)，(5.67) から表面波の波動方程式

---

† この積分は，$P(x,z,t)=-\rho\int^z f(z')dz'+q(x,t)$ と任意関数 $q(x,t)$ を含むが，上記境界条件，$P(x,\xi(x,t),t)=-\rho\int^\xi f(z')dz'+q(x,t)=P_g$ から $q(x,t)$ は定まり，(5.65) を得る。

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c_3^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \tag{5.68}$$

が得られ，第三音波の速度は

$$c_3^2 = \frac{\rho_s}{\rho} f d \tag{5.69}$$

となる。

今までの取扱いでは，温度は平衡値 T としたが，超流体の移動が起きるとそのまわりに温度変化 $T'(x,t)$ が生じ，その結果，表面を通して流体から気相へのヘリウム原子の蒸発，およびその逆過程の凝縮により質量や熱エネルギーの移動が起きる。これらの効果を考慮すると，上記の議論は以下のような修正を受ける。まず (5.61) を

$$\rho \frac{\partial \xi}{\partial t} + \rho_s d \frac{\partial v_{sx}}{\partial x} = -KT' \tag{5.70}$$

と書く。右辺は表面を通して蒸発，凝縮による差し引きの質量の減少で，温度変化 T' に比例するとした。比例係数 K は表面で起きる上記過程を特徴づけるいくつかの因子で決まるが，その表式は省略する。次にエントロピー $S = \rho\sigma$ は，表面での蒸発，凝縮過程を含めて保存しなければならない。質量保存則に対しての操作と同じように，保存則をスラブの体積について積分して，

$$\rho\sigma \frac{\partial \xi}{\partial t} + \rho d \frac{C}{T} \frac{\partial T'}{\partial t} = -K\left(\frac{L}{T} + \sigma\right) T' \tag{5.71}$$

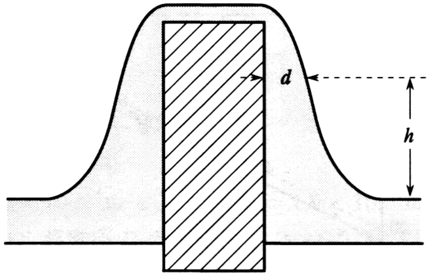
となる。ここで σ の圧力依存性は無視した。また $C = T(\partial\sigma/\partial T)$ は比熱である。右辺は前述の蒸発過程での質量の減少にともなうエントロピーの減少と，蒸発潜熱 (L は単位質量当たりの値) による減少が考慮された。最後に $v_{sx}(x,t)$ の運動は温度勾配を考慮して

$$\frac{\partial v_{sx}(x,t)}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \sigma \frac{\partial T'}{\partial x} \tag{5.72}$$

となる。上記の 3 式に対して，波数 k，振動数 ω の平面波の解を求めると，その分散式は

$$\left(\frac{\omega}{k}\right)^2 = \frac{\rho_s}{\rho} f d + \frac{\rho_s \sigma T}{\rho} \left(\sigma - i\frac{fK}{\rho\omega}\right) \left(C - i\frac{KL}{\rho d\omega}\right)^{-1} \tag{5.73}$$

となり，右辺は ω に依存して虚数項を含む形となる。しかし予想される K の値に対して問題とする低振動数では，各括弧の虚数部分が実数部に比べ



5·9 図 高さ h に対する膜厚 d

て大きくなり，

$$\frac{\omega^2}{k^2} = c_3^2 = \frac{\rho_s}{\rho} fd\left(1 + \frac{\sigma T}{L}\right) \tag{5.74}$$

と近似できる。ところで括弧内の $\sigma T/L$ の値は，低温では 1 に比べて無視できるほどに小さく，T_λ 近くでも 0.15 に達する程度である。結局 c_3 は十分よい近似で (5.69) で与えられる。

ところで基盤上にできる膜の厚さはどのように決まるのであろうか。5·9 図のように基盤をヘリウムの液槽に立てたときに壁面に生ずる膜を考える。温度 T の平衡状態では，飽和蒸気圧 P_s に対する気相の化学ポテンシャル $\mu_g(P_s, T)$ とバルク液相の化学ポテンシャル $\mu(P_s, T)$ は等しく，共存値 $\mu_e(T)$ をとる；

$$\mu(P_s, T) = \mu_g(P_s, T) = \mu_e(T) \tag{5.75}$$

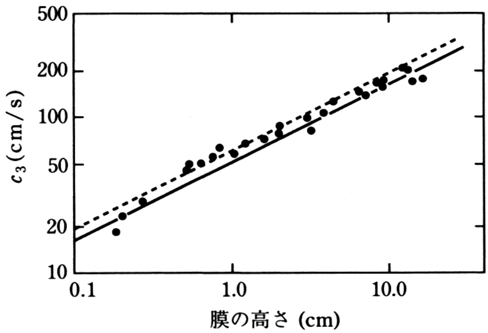
液面から高さ z の位置での膜厚を $d(z)$ とすれば，van der Waals ポテンシャル $\phi(d(z))$，重力ポテンシャル gz そして化学ポテンシャル $\mu(P_s, T)$ の和は，膜の位置によらず一定とみなせる。したがって平衡条件から，膜と蒸気の境界面は等ポテンシャル面

$$\phi(d(z)) + gz = \phi(d(0)) \tag{5.76}$$

により決まることになる。van der Waals ポテンシャル $\phi(d(z))$ については I.E.Dzyaloshinskii[21)] らの議論があり，次のように与えられる。

$$\phi(d) = -\frac{\alpha}{d^n} \tag{5.77}$$

α は基盤の固体分子により決まる定数，n は薄い膜では $n = 3$，厚くなると $n = 4$ に変わる。これによると，(5.76) は $z = h$ に対し，$\phi(d(0)) \simeq 0$ の



5·10 図 高さ h による第三音波の音速 c_3. 直線は $c_3 = \left(\frac{\rho_s}{\rho}ngh\right)^{1/2}$ で $n = 4$ (実線), $n = 3$ (破線) を表す。

近似で

$$d^n = \frac{\alpha}{gh} \tag{5.78}$$

と決まる。したがって (5.69) は $c_3^2 = \rho_s ngh/\rho$ と表される。5·10 図は h を変化させたときの c_3 の測定値[22]であり，この関係を再現 ($\propto \sqrt{h}$) してはいるが，n の値を正確に決めるには至っていない。

蒸気圧を減らして非飽和状態にすると，重力の影響は無視できるようになる。膜の表面から十分に離れた場所での蒸気圧を P とすると，そこでの化学ポテンシャル$\mu_g(P,T)$ は平衡条件

$$\mu_g(P,T) = \mu_g(P_s,T) + \phi(d) \tag{5.79}$$

を満たす。希薄な蒸気に対して理想気体の近似を適用すれば，

$$\mu_g(P,T) - \mu_g(P_s,T) = \frac{k_B T}{m}\log\left(\frac{P}{P_s}\right) \tag{5.80}$$

が成立する。ここで m はヘリウム原子の質量である。したがって van der Waals ポテンシャルは蒸気圧と

$$\phi(d) = \frac{k_B T}{m}\log\left(\frac{P}{P_s}\right) \tag{5.81}$$

の関係を持つ (これは古く J.Frenkel[23]により議論された)。

E.S.Sabisky と C.H.Anderson[24] は基盤側から発生させた高振動数の音波が，厚さ d の膜で示す共鳴を用いて d の直接測定を実行した。そして先

の (5.77) の内挿式として

$$\phi(d) = -\frac{\alpha}{d^3\left(1+\frac{d}{d_0}\right)} \tag{5.82}$$

の形を仮定し，基盤の性質に依存する 2 つの定数 α と d_0を決定した。ガラスの基盤を用いたときには

$$\alpha = 2.6\times10^{-24}\mathrm{m^5s^{-2}}, \qquad d_0 = 1.5\times10^{-8}\mathrm{m} \tag{5.83}$$

の値を得た。一方，蒸気圧 P の測定値を (5.81) に代入して得られた ϕ と，(5.82) で与えられる ϕ とは，非常によい一致を示すことも確かめている。

膜厚が薄くなった極限では，空間的に二次元のヘリウム系になる。この場合には 8 章で議論されるように二次元超流動の特異な性質が実現され，ある温度 (8 章で導入される T_{KT}) で三次元系とは異なった相転移が起きることが，J.M.Kosterlitz と J.D.Thouless により予言された。第三音波の実験で，膜厚がある値より薄くなるとき，ある温度以上では第三音波のシグナルが急に伝播しなくなることが以前から知られていた。これを解析すると，上の理論的予測とよい一致が得られ，二次元超流動での相転移の 1 つの実験的証しとなった。

補遺 5　二流体力学の構成と散逸効果

5–3 節に二流体力学方程式を書き下したが，ここでは，Khalatnikov[8] によるその導出の概略と，散逸項について議論をまとめておく。

先の (5.24)~(5.27) の 4 式の代わりに，より一般的な形を仮定する：

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\boldsymbol{j} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{j}}{\partial t} + \nabla : (\mathit{\Pi}+\mathit{\Pi}') = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}}{\partial t} + \nabla\left(\phi+\frac{1}{2}v_{\mathrm{s}}^2+h'\right) = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \nabla\cdot\left(\boldsymbol{J}_S+\boldsymbol{J}'_S\right) = \frac{R}{T} \tag{4}$$

最初の 2 つの保存則は (5.24)，(5.25) と同じであるが†，(3) では未定のスカラー関数 ϕ を，(4) では未定のエントロピー流 $\boldsymbol{J}_S$ を含む形を仮定する (以下の議論から $\phi=\mu$，$\boldsymbol{J}_S = S\boldsymbol{v}_{\mathrm{n}}$ が示されることになる (21))。上には書かなかったがエネルギー保存則

† (2) ではテンソルの微分に対する略記号 $\nabla : \mathit{\Pi} = \partial\mathit{\Pi}_{ij}/\partial r_j$ を用いた。ただし同じ添え字については和をとるとする。

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{Q}'\right) = 0 \tag{5}$$

はもちろん成立しており，以下の議論はこれを基礎にとる。ここで $\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{Q}'$ はエネルギー流およびその散逸流である。2つめの基礎的要請として，速度場が2つあることに対応して，実験室系と $\boldsymbol{v}_\mathrm{s}$ で動く座標系 (これは先に $\boldsymbol{v}_\mathrm{s}$静止系とよんだもの) の間に Galilei の相対性原理が成り立つとする。$\boldsymbol{v}_\mathrm{s}$静止系での物理量には下添え字0を付して表すことにすると，これらと実験室系での量との間には

$$\boldsymbol{j} = \rho\,\boldsymbol{v}_\mathrm{s} + \boldsymbol{j}_0 \tag{6}$$

$$\Pi_{ij} = \rho\, v_{\mathrm{s}i} v_{\mathrm{s}j} + v_{\mathrm{s}i} j_{0j} + v_{\mathrm{s}j} j_{0i} + \Pi_{0ij} \tag{7}$$

$$E = \frac{1}{2}\rho\,\boldsymbol{v}_\mathrm{s}^2 + \boldsymbol{v}_\mathrm{s}\cdot\boldsymbol{j}_0 + E_0 \tag{8}$$

$$\boldsymbol{Q} = E\boldsymbol{v}_\mathrm{s} + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}_\mathrm{s}^2\,\boldsymbol{j}_0 + \boldsymbol{v}_\mathrm{s} : \Pi_0 + \boldsymbol{Q}_0 \tag{9}$$

$$\boldsymbol{J}_S = S\boldsymbol{v}_\mathrm{s} + \boldsymbol{J}_{S0} \tag{10}$$

の関係が成立する†。次に $\boldsymbol{v}_\mathrm{s}$静止系では熱力学の法則

$$dE_0 = T\,dS + \mu\,d\rho + (\boldsymbol{v}_\mathrm{n} - \boldsymbol{v}_\mathrm{s})\cdot d\boldsymbol{j}_0 \tag{11}$$

が成立していることを前提とする。ここで常流動速度 $\boldsymbol{v}_\mathrm{n}$ あるいは相対速度 $\boldsymbol{v}_\mathrm{n} - \boldsymbol{v}_\mathrm{s}$ が $\boldsymbol{j}_0$ に共役な変数として導入された。次に $\boldsymbol{v}_\mathrm{s}$静止系でのベクトル量は相対速度 $\boldsymbol{v}_\mathrm{n} - \boldsymbol{v}_\mathrm{s}$ に依存して表されることを要請する。そのときには

$$\boldsymbol{j}_0 = \rho_\mathrm{n}\boldsymbol{w}, \qquad \boldsymbol{w} \equiv \boldsymbol{v}_\mathrm{n} - \boldsymbol{v}_\mathrm{s} \tag{12}$$

と書くことができ，ρ_n が定義される。これはすでに (5.17) で述べたもので，$\rho - \rho_\mathrm{n} = \rho_\mathrm{s}$ で ρ_s を定義すれば (5.28) となり，(6) は (5.29) となる。さらに (11) は (6)，(8) を用いて実験室系での関係式

$$dE = T\,dS + \nu\,d\rho - \rho_\mathrm{s}\,\boldsymbol{w}\cdot d\boldsymbol{v}_\mathrm{s} + \boldsymbol{v}_\mathrm{n}\cdot d\boldsymbol{j} \tag{13}$$

として表される。ここで $\nu = \mu + \boldsymbol{v}_\mathrm{s}^2/2 - \boldsymbol{v}_\mathrm{n}\cdot\boldsymbol{v}_\mathrm{s}$ である。さて流体力学に移行するのには，この熱力学の関係が空間的，時間的に局所的にも成立することを仮定する ($dE(\boldsymbol{r},t) = T(\boldsymbol{r},t)dS(\boldsymbol{r},t) + \cdots$)。そのときには時間的な発展に対し，

$$\frac{\partial E}{\partial t} = T\,\frac{\partial S}{\partial t} + \nu\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{v}_\mathrm{n}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial t} - \rho_\mathrm{s}\boldsymbol{w}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{v}_\mathrm{s}}{\partial t} \tag{14}$$

と書くことができる。そこで右辺の各自由度の時間微分を，(1)~(4) を用いて空間に関する微分項で表す。その際 (5) との比較をすることを見越して，エネルギー流に対する発散項 ($\nabla\cdot[\cdots]$) の形に表す部分とそれ以外の項に分けて書くと††，

† $\boldsymbol{v}_\mathrm{s} : \Pi = v_{\mathrm{s}j}\Pi_{ij}$ の略記号を用いた。

†† この分離の仕方には任意性が残るが，最終の結論には影響しない。

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial t} = -\nabla\cdot\Big[&\mu\boldsymbol{j}_0 + T\boldsymbol{J}_{S0} + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}_s^2\,\boldsymbol{j}_0 + \boldsymbol{v}_n : \Pi_0 \\ &+ \left(TS + \mu\rho + \frac{1}{2}\rho\boldsymbol{v}_s^2 + \boldsymbol{v}_n\cdot\boldsymbol{j}_0\right)\boldsymbol{v}_s\Big] \\ &-\nabla\cdot\left[\boldsymbol{v}_n : \Pi' - \rho_s\boldsymbol{w}h' + T\boldsymbol{J}'_S\right] \\ &+\Pi : \nabla\boldsymbol{v}_n + \boldsymbol{J}_S\cdot\nabla T \\ &+\boldsymbol{j}\cdot\nabla\left(\mu + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}_s^2 - \boldsymbol{v}_s\cdot\boldsymbol{v}_n\right) + \rho_s\boldsymbol{w}\cdot\nabla\left(\phi + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}_s^2\right) \\ &+\Pi' : \nabla\boldsymbol{v}_n - h'\nabla\cdot(\rho_s\boldsymbol{w}) + \boldsymbol{J}'_S\cdot\nabla T + R \end{aligned} \tag{15}$$

ここでもテンソル Π などを含む項に対しては略記号†を用いた。次に圧力 P を定義する。これは $\boldsymbol{v}_s$静止系での全エネルギー VE_0の体積 V による微分で与えられるが，その際，全質量 ρV，エントロピー SV，相対運動量 $\boldsymbol{j}_0 V$は一定に保たれ，

$$P = -\left(\frac{\partial VE_0}{\partial V}\right) = -E_0 + TS + \rho\mu + \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{j}_0 \tag{16}$$

となる。これと (8)，(9) を用いて，(15) の最初の 2 行 (非散逸項) は，

$$-\nabla\cdot[\mu\boldsymbol{j}_0 + T\boldsymbol{J}_{S0} + \boldsymbol{w} : (\Pi_0 - P) + \boldsymbol{Q} - \boldsymbol{Q}_0] - \nabla\cdot(P\boldsymbol{v}_n) \tag{17}$$

と変形される。最後の項は別 (後述) にして，この表式が (5) の $\nabla\cdot\boldsymbol{Q}$ と同形になることを要求すると，$\boldsymbol{v}_s$静止系での $\boldsymbol{Q}_0$ は

$$\boldsymbol{Q}_0 = \mu\boldsymbol{j}_0 + T\boldsymbol{J}_{S0} + \boldsymbol{w} : (\Pi_0 - P) \tag{18}$$

の形に定まり，先の (12) に対して課したのと同様に，$\boldsymbol{w}$ のみに依存するという要請を満たす。そして (17) の最後の項，$\nabla\cdot(P\boldsymbol{v}_n)$ を別扱いした理由はこのためである。次に (15) の 3 行目 (散逸項) の $\nabla\cdot[\cdots]$ は (5) の $\nabla\cdot\boldsymbol{Q}'$ に一致するものとすれば，$\boldsymbol{Q}'$ が定まるが，それは散逸項の具体的な形 (後述) に依存している。最後に (5) との比較から，(15) の残りの項は全体としてゼロになることが要求されるが，非散逸項，散逸項の各々をゼロにすればよい。まず前者について考えるとき，先に残した $\nabla\cdot(P\boldsymbol{v}_n)$ も含める必要がある。その際 (11) と (16) から導かれる関係式，

$$\boldsymbol{v}_n\cdot\nabla P = \boldsymbol{v}_n\cdot(\rho\nabla\mu + S\nabla T) + \boldsymbol{j}_0(\boldsymbol{v}_n\cdot\nabla)\boldsymbol{w}$$

を用いて，非散逸項全体がゼロになる条件は

$$\begin{aligned}&[\Pi_{0ij} - (P\delta_{ij} + \rho_n w_i w_j)]\frac{\partial v_{ni}}{\partial r_j} \\ &-\rho_s\boldsymbol{w}\cdot\nabla(\phi - \mu) + (\boldsymbol{J}_{S0} - S\boldsymbol{w})\cdot\nabla T = 0\end{aligned} \tag{19}$$

と書かれる。これが成立するための条件として，

$$\Pi_{0ij} = P\delta_{ij} + \rho_n w_i w_j \tag{20}$$

$$\phi = \mu, \qquad \boldsymbol{J}_{S0} = S\boldsymbol{w} \tag{21}$$

† $\nabla\cdot(\boldsymbol{v} : \Pi) = \dfrac{\partial}{\partial r_j}(v_i\Pi_{ij}), \qquad \Pi : \nabla\boldsymbol{v} = \Pi_{ij}\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j}$

の関係が得られる。(20) を (7) に代入すれば (5.30) を得る。(21) を (3)，(4) に適用したのが，(5.26) および (5.27) である。そして $\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}$静止系でのすべての量が二流体の変数で書かれたことにより，流体力学の方程式は非散逸項に関する限り完成したことになる。

最後に，(15) の残された散逸項がゼロになる条件から，

$$R = -\Pi' : \nabla \boldsymbol{v}_{\mathrm{n}} + h' \nabla \cdot (-\rho_{\mathrm{s}} \boldsymbol{w}) - \boldsymbol{J}'_S \cdot \nabla T \tag{22}$$

となり，エントロピー生成率 R の表式が得られる。ここに現れた粘性による応力テンソル Π'は通常の流体力学のように，熱平衡からのはずれが小さいときには，変形速度テンソルの 1 次に比例すると仮定される。ただ二流体では速度場として，$\boldsymbol{v}_{\mathrm{n}}$と $\boldsymbol{w}$ が存在すること，そしてスカラー量 h' との対称性を考慮して，

$$\begin{aligned}\Pi'_{ij} &= -\eta_{\mathrm{n}} \left(\frac{\partial v_{ni}}{\partial r_j} + \frac{\partial v_{nj}}{\partial r_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \nabla \cdot \boldsymbol{v}_{\mathrm{n}} \right) \\ &\quad + \delta_{ij} \left(\zeta_1 \nabla \cdot (\rho_{\mathrm{s}} \boldsymbol{w}) - \zeta_2 \nabla \cdot \boldsymbol{v}_{\mathrm{n}} \right) \end{aligned} \tag{23}$$

$$h' = \zeta_3 \nabla \cdot (\rho_{\mathrm{s}} \boldsymbol{w}) - \zeta_4 \nabla \cdot \boldsymbol{v}_{\mathrm{n}} \tag{24}$$

と表される。速度場が常流動速度のみの場合 ($\rho_{\mathrm{s}} = 0$) は通常の流体力学に相当しており，Π' は粘性率 η_{n} と第二粘性率 ζ_2[†]により表される。二流体では h'が存在し，上式のように 4 個の第二粘性率が現れる。ただし輸送係数の間に一般的に成立する Onsager の相反定理により $\zeta_1 = \zeta_4$ の関係があり，独立な係数は 3 個となる。最後に熱伝導流 $\boldsymbol{J}'_S$ は通常のように温度勾配に比例するとして，熱伝導度 κ により

$$\boldsymbol{J}'_S = -\kappa \nabla T \tag{25}$$

と表される。以上の表式を用いてエントロピー生成率 R は

$$\begin{aligned} R = {} & \zeta_2 (\nabla \cdot \boldsymbol{v}_{\mathrm{n}})^2 - 2\zeta_1 \nabla \cdot \boldsymbol{v}_{\mathrm{n}} \, \nabla \cdot (\rho_{\mathrm{s}} \boldsymbol{w}) + \zeta_3 (\nabla \cdot (\rho_{\mathrm{s}} \boldsymbol{w}))^2 \\ & + \frac{\eta_{\mathrm{n}}}{2} \left(\frac{\partial v_{ni}}{\partial r_j} + \frac{\partial v_{nj}}{\partial r_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \nabla \cdot \boldsymbol{v}_{\mathrm{n}} \right)^2 + \frac{\kappa}{T} (\nabla T)^2 \end{aligned} \tag{26}$$

と書かれる。$R \geq 0$ であるためには，係数 $\zeta_2, \zeta_3, \eta_{\mathrm{n}}, \kappa$ がすべて正値であることと，$\zeta_2 \zeta_3 \geq \zeta_1^2$ が要求される。

上記散逸項にパラメーターとして導入された輸送係数の具体的な評価は，通常の流体の輸送係数を求める問題と同じく気体運動論 [8),25)] による。常流体をになう励起量子 (フォノン，ロトン) の衝突項を含む Boltzmann 方程式の解を求めることにより，上記輸送係数の温度や圧力の依存性が求められている。そして音波の吸収など実験との比較もなされている。

† 体積粘性率 $\zeta_2 + (2/3)\eta_{\mathrm{n}}$ を第二粘性率とよぶこともある。

6. 超流動流の安定性と臨界速度

液体ヘリウムが示す性質の中で最も基本的な特性は，超流動流の安定性である。2-2 節の実験 (II) で見たように，トーラス容器の回転を止めても，超流動密度に比例した $\boldsymbol{v}_s$ の流れが安定に持続する。しかし $\boldsymbol{v}_s$ の値が増大して，ある臨界速度を越えると，この安定性は壊れ，流れは減衰することも多くの実験から知られている。これらの問題は液体ヘリウムの研究の中でも，古くから最も注目されてきたにもかかわらず，その理解は未だに完全とはいえない状況にあり，現在でも活発な研究がおこなわれている。ただ超流動の減衰には，量子化された渦の生成とその運動がかかわっていることだけは確かなものとして広く受け入れられている。

超流動の流れが実現している状態は流れのない基底状態に比べ，その運動エネルギーだけ高いエネルギー状態にあることはいうまでもない。古典流体では粘性によりそのエネルギーは散逸するが，超流動では半永久的に持続される。これは熱力学的な意味で準安定な平衡状態とみなされる。このような状態は局所的にエネルギーの極小値にあり，まわりの状態に対してエネルギーの障壁が存在する結果，安定な準熱平衡状態が実現していることを意味する。したがってよりエネルギーの低い状態へ遷移して流れの速度が減少するためには，その障壁を乗り越える必要がある。超流動速度の値が増大してある臨界速度に達したとき，このエネルギーの障壁がなくなるか，あるいはその大きさが減少して熱的に障壁を越える確率が測定可能な大きさになるとき，超流動状態は不安定となり流れの減衰が観測されることになる。

まず Landau そして Feynman の臨界速度の議論から始める。続いて発生

した渦糸の運動が，超流動のコヒーレンスを乱して流れの不安定化に導く機構——渦糸が $\boldsymbol{v}_{\rm s}$ の流れを横切るとき，秩序変数の位相の変化を通して $\boldsymbol{v}_{\rm s}$ が減少する——の考察をする。これは実験結果の解析に当たり基本的に重要な意味を持つ。実験は興味があると思われる3つのタイプに限り詳細に考察する。問題とする量子渦にかかわる現象の理論的考察の多くは，ゆらぎの統計力学と流体力学に従っているが，状況に応じては (絶体零度付近) 量子力学的考察も必要となる。この章では，常流動は流れていないか，流れてはいても十分低温で $\rho_{\rm n}=0$ としてよい場合に限り，流れは超流動速度 $\boldsymbol{v}_{\rm s}$ のみを対象にする。

6–1　臨界速度——励起量子に対する安定性

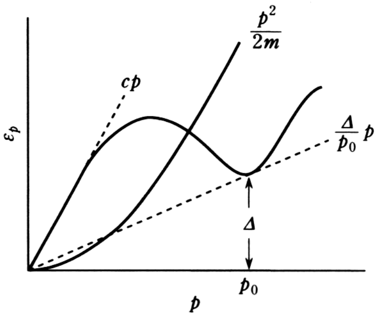
Landau の条件[1)]　　$T=0$ で超流動速度 $\boldsymbol{v}_{\rm s}$ の流れがあるとき，容器の壁との相互作用によりフォノンまたはロトンといった励起量子を自発的に励起するようになれば，上記のエネルギー障壁はゼロとなり，超流動の流れは流体力学的に不安定となる。これが実現するのは，$\boldsymbol{v}_{\rm s}$ の流れがあるときの励起量子のエネルギー $\varepsilon'_{\boldsymbol{p}}$ が負になるときである。容器が静止している座標系 (実験室系) でみたときの励起量子のエネルギー $\varepsilon'_{\boldsymbol{p}}$ は，(5.~~18~~19) で与えられるから ($\boldsymbol{v}_{\rm n}=0$)，Landau は

$$\varepsilon'_{\boldsymbol{p}}=\varepsilon_{\boldsymbol{p}}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{v}_{\rm s}\geq 0 \tag{6.1}$$

を超流動の安定条件とした。$\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{v}_{\rm s}$ が反平行のときに $\varepsilon'_{\boldsymbol{p}}$ が最小となることに注意すれば，臨界速度 $v_{\rm c}$は (6.1) がちょうどゼロとなる速度，

$$v_{\rm c}={\rm Min}\left(\frac{\varepsilon_{\boldsymbol{p}}}{p}\right) \tag{6.2}$$

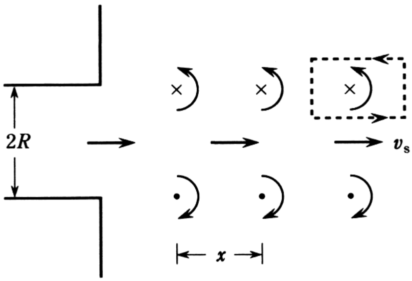
で与えられる。もし自由粒子系を想定すれば，励起エネルギー$\varepsilon_{\boldsymbol{p}}=p^2/2m$ から 任意の p の励起に対して (6.1) が満たされなくなり，どんなに小さな $\boldsymbol{v}_{\rm s}$ の流れも不安定となる ($v_{\rm c}=0$)。一方，液体ヘリウムでの励起エネルギーはフォノンあるいはロトンで与えられる。フォノンに対する$\varepsilon_{\boldsymbol{p}}=cp$ を考えれば $v_{\rm c}=c\simeq 240$m/s(音速)，ロトンに対しては，6·1 図から明らかなように，$v_{\rm c}=\Delta/p_0\simeq 60$m/s となる。実験で測定されている臨界速度はこれより小さい値のものが多いが，後にふれる最近の実験では，臨界速度 $\simeq 10$m/s のものも測定されている。Landau の条件は超流動が安定であるための十分条件を与えているに過ぎないことは留意すべきである。



6·1 図　Landau の臨界速度

なお上述の事情とは異なる実験で Landau の臨界速度は測定されている。静止した超流体の中をイオンが速度 u で運動するとき，u が臨界速度 $u_c = \Delta/p_0$ に達するとロトンを自発放出して減速することが実験的に見い出されている。イオンの運動では，また渦環が生成されることも知られており，最後の節で詳しくふれることにする。

Feynman の条件[2)]　臨界速度が渦糸の生成と関与していることを始めて指摘したのは Feynman である。古典流体のように，液体ヘリウムでも超流動の速度が大きくなれば渦が発生して層流から乱流状態への遷移が起きてよいとする。フォノン，ロトンのような励起の代わりに，空間的に局所的な励起である量子化された渦糸の生成により，超流動が不安定となる条件として臨界速度を考える。半径 R の細管中を流れる超流動が出口における噴流 (jet-flow) の中に，$\boldsymbol{v}_s$ に垂直で互いに反対向きの渦度をもつ渦糸の対を生成し，その結果，超流動のエネルギーが散逸すると考える。ここでは半径 R のパイプの噴流中に，渦糸の対の代わりに半径が R 程度の渦環が生成される場合を考察する (6·2 図)。エネルギー $E(R)$ の渦環が間隔 x ででき，流速が渦環の内側で v_s外側でゼロとすると，流速 v_s に対する循環は 6·2 図の破線の経路積分から $xv_s = \kappa$となる。そして渦環の位置での流速を $v_s/2$ (噴流の内と外の平均) とすれば，単位時間に生ずる渦環の個数は，$v_s/2x = v_s^2/2\kappa$ となる。したがって，単位時間当たりの渦環生成エネルギーは，$(v_s^2/2\kappa)E(R)$ となる。一方，このエネルギーは，単位時間当たりの超流動の運動エネルギーの消費によるとすると，これは $(\pi R^2 v_s)(\rho_s v_s^2/2) = (v_s^2/2\kappa)\,\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{v}_s$と与えられる。ここで渦環のインパルス



6·2 図 噴流中の渦環生成

として (3.51) の $P = \pi\rho_s\kappa R^2$ を用いた。この二つのエネルギーが等しくなる条件は

$$E(R) - \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{v}_s = 0 \tag{6.3}$$

となる。これは上記の Landau の条件を渦環の励起に適用したことに相当している。このとき臨界速度は (3.49), (3.51) を用いて

$$v_c = \frac{\kappa}{2\pi R}\left(\log\frac{8R}{a} - \frac{7}{4}\right) \tag{6.4}$$

となる。この臨界速度は管径 R にほぼ逆比例し，温度にはよらない。実験結果†のなかには，これと定性的に符合するものもある。ただし，この議論では，どのようにして渦環が発生するかについては何もふれていない。古典流体では，管壁との粘性により流れの中に渦が発生し乱流状態となる。その際渦の循環は任意の値をもつことが可能であろう。一方，超流動には粘性がないので，どのような機構でそして有限な循環 κ の渦が発生するのかについては，なにも答えていない。それはともかくとして，κ/R に依存した (6.4) 型の表式は，渦環の場合に限らず (括弧の中の値は状況により変わるが)，広く Feynman の臨界速度とよばれて文献などによく登場する。

6–2 位相のスリップと超流動速度の変化

超流動速度の減速と渦のかかわりを考える際，Feynman の議論には含まれなかった，一つの物理的に重要な指摘が P.W.Anderson[5] によりなされ

† 臨界速度の実験結果[3]は，流れのタイプや測定手段により様ざまであるが，それらを臨界速度の大小2つのグループに分けて整理した最近の報告[4]は参考になる。

た。超流動速度 $\boldsymbol{v}_\mathrm{s} = (\hbar/m)\nabla\varphi$ の減衰は，生じた渦糸が超流動の流れを垂直に横切って動くときに生ずる位相変化により起きるというもので，位相のスリップ (phase slippage) とよばれている。Anderson はこの概念の議論に当たり，超流動や超伝導のような巨視的な量子現象を示す系に対し，準古典的な適用範囲の広い運動方程式の存在を指摘した。その議論から始める。

超流動の運動方程式　この方程式の成立は，3 章で議論した超流動を特徴づける秩序変数 Ψ の存在と密接な関係をもつ。秩序変数は Bose 凝縮系を表す状態変数として，振幅と位相が同時に決まった準古典的な波動関数であったが，そのような巨視的量子状態では，粒子数 N と位相変数 φ が正準共役 (正確には Nと$\hbar\varphi$) な量とみなすことができた。このときには，Nと φ を変数としたハミルトニアン $H(N,\varphi)$ により，次のようなハミルトン方程式†が成立する；

$$\hbar\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial \varphi} \tag{6.5}$$

$$\hbar\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial N}. \tag{6.6}$$

これらの式がどんな意味をもつかについて，ここではすでに導入ずみの超流動速度 $\boldsymbol{v}_\mathrm{s} = (\hbar/m)\nabla\varphi$ とのかかわりを例題として考えてみる。

始めに (6.5) を考える。いま，x 方向に一様な v_s で流れている超流体の中に 2 点 x_1, x_2を考え，そこでの位相を φ_1, φ_2 とする。v_sに垂直な面積 s の x_1における断面に流入する粒子は，x_2における断面から流出し，体積 $V = s\Delta x$ $(\Delta x = x_2 - x_1)$ の中には粒子数 N が一定に保たれるとする。この場合 x_1を含む領域 1 $(x \leq x_1)$ と x_2を含む領域 2 $(x \geq x_2)$ を接合する境界エネルギーは，位相差 $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ に依存し，これは V の中の超流動の運動エネルギー，$H = mN{v_\mathrm{s}}^2/2 = (mN/2)(\hbar\Delta\varphi/m\Delta x)^2$ を考えればよい。このとき領域 1，2 での粒子数の時間変化により s を通過する質量流 J は (6.5) により

$$J = \frac{\hbar N}{2}\frac{\partial}{\partial(\Delta\varphi)}\left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}\right)^2 = \rho s v_\mathrm{s} \tag{6.7}$$

と与えられる。ここで $\rho = (mN/s\Delta x)$ により質量密度を定義した。(6.5) 式は，最初，2 つの接触する超伝導体の間に流れる Josephson 効果の議論

† これは正準共役な変数，位置座標と運動量に対するハミルトン方程式に類似したものである。

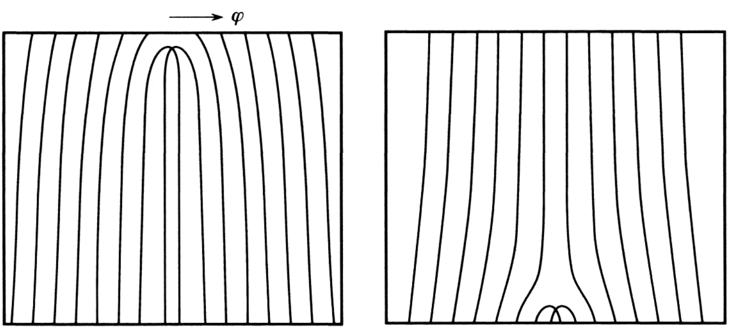
に用いられたものである。

もう一つの式 (6.6) は，Hの平均値として N に依存する内部エネルギーも考慮し，熱力学の関係，$\partial H/\partial N = \mu + mv_s^2/2$ (μ は 1 粒子当たりの化学ポテンシャル) を用いて，

$$\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\left(\mu + \frac{mv_s^2}{2}\right) \tag{6.8}$$

と書くことができる。これは 3 章で議論した (3.35) に相当するものである。両辺の ∇ をとれば，すでに議論をした $\boldsymbol{v}_s$の運動方程式，(2.8) あるいは (3.42) が再現されることになる。もし外部から駆動する化学ポテンシャルの勾配 $\nabla\mu$ があれば超流動速度は加速あるいは減速される。そこで主題に戻り，渦の運動に伴う (6.8) の化学ポテンシャル (の差) がどのように出現するかの議論に移る。

位相のスリップ[5)]　　パイプの中の一様な $\boldsymbol{v}_s$ の流れを考える。そのとき秩序変数の位相は一定の割合で変化しているから，等位相線 (面) を描けば $\boldsymbol{v}_s$ に垂直な平行線 (面) となる。いまこの流れの中程上部の壁近くに 1 本の渦糸 (紙面の表から裏に向く渦度をもつ) が発生したとすると，渦のまわりの 2π の位相変化が一様な位相変化に重なり，6·3 図 (a) のような位相分布となる[6)]。ただし図には一様な流れの等位相線が，左から右へ $\pi/2$ の単位で増加する平行線として描かれている。渦のまわりでは位相は一様 (平



6·3 図　2π の位相スリップによる位相勾配の減少。
(a)　$\pi/2$ 間隔の等位相線の中に渦糸が上部に発生。
(b)　渦糸が下部に移動，2π の位相スリップが起こる。

行線) ではなくなる。

いまこの渦糸が垂直下方に運動したとすると，位相分布は図 (b) のように変化する。この場合 4 本の位相線がスリップして消滅し，渦糸ができる前と比較して 2π の位相が減少したことになる。したがって流れに沿ってとった 2 点の間を，単位時間に N_v 本の渦糸が流れを完全に横切ったとすれば，2 点間の位相差 $\Delta\varphi$ の時間変化

$$2\pi\hbar\frac{\partial N_v}{\partial t} = -\hbar\frac{\partial \Delta\varphi}{\partial t} \tag{6.9}$$

が生じ，その結果超流動速度は減速することになる。それに伴って超流動の運動エネルギーも減少するが，その減少エネルギー ΔE は次のように求められる。一様な超流動の平均速度は (3.46) でみたように，$v_s = \kappa n/L$ と量子化されている (ここでは長さ L の周期条件を満たすとした)。2π の位相スリップにより超流動速度が v_s から $v_s' = \kappa(n-1)/L$ に変化したとすれば，

$$\Delta E = \frac{1}{2}mN(v_s^2 - {v_s'}^2) \simeq \kappa J\left(1 + O(n^{-1})\right) \tag{6.10}$$

で与えられる†。ここで J は (6.7) の質量流である。通常の速度では n は十分大きいので第 2 項は無視できる。6-5 節で述べる実験では，2π 単位の位相スリップによるエネルギー散逸が実際 (6.10) に従って不連続的に起きていることを観測している。

ところで (6.9) の関係を，渦糸の速度 $\boldsymbol{v}_l$ と渦度 $\boldsymbol{\omega}$ を用いて改めて見直すことにより，$\boldsymbol{v}_s$の運動方程式自身もそれらにより表すことができる。パイプ中の流れに沿って距離 Δx をとり，パイプの上下の幅 d と Δx でつくる二次元面を考える。そしてこの面に垂直な渦度をもつ渦糸が，面積 $d\Delta x$ 内を単位時間に N_v本，上から下に速度 $\boldsymbol{v}_l$で流れを横切るとする。渦糸の面密度 $n_v = N_v/d\,\Delta x$，そして平均の渦度 $\boldsymbol{\omega} = \kappa n_v \hat{\boldsymbol{z}}$ ($\hat{\boldsymbol{z}}$ は渦度の向きを表す単位ベクトル) を導入すれば，渦糸の単位長さ当たりの移動率は，$(\partial N_v/\partial t)(\Delta x)^{-1} = n_v v_l$ と書くことができる。したがって (6.9) は

$$\frac{\kappa}{\Delta x}\frac{\partial N_v}{\partial t} = -\frac{\hbar}{m}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\Delta\varphi}{\Delta x} = -\frac{\partial v_s}{\partial t} = \kappa n_v v_l$$

と表される。ベクトルの向きを考慮すれば，

† Anderson[5)] は小さな孔を通して流通できる 2 つのヘリウム槽を考え，より現実的な議論をしている。

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_s}{\partial t} = -\widehat{\boldsymbol{z}} \times \kappa\, n_v\, \boldsymbol{v}_l = \boldsymbol{v}_l \times \boldsymbol{\omega} \tag{6.11}$$

という結果を得る。5章では，渦なしの超流動速度場に対する二流体力学を対象としてきたが，渦糸が存在するときには，(6.11) のように渦の運動の寄与が重要となる。ここでは単純な渦糸の運動による位相スリップを考えたが，7章で見るように，(6.11) は渦を含む二流体力学でも v_sの運動方程式として，一般に成立することが示される ((7.17) 参照)。

ここまでは，渦糸が流れを垂直に横切る場合を取り上げてきたが，位相スリップが起きるにはこのような形に限られてはいない。例えば，流れの中央部に小さな半径の渦環が生じ，それが流れに垂直に膨張してゆきパイプの壁に届いたところで消滅する場合を想定する。もし生じた渦環が，渦環の内側を通る流れの位相に比べて外側のそれが 2π 小さいような渦度のものであれば，膨張の終わったあとでは 2πの位相スリップが起きたことになる。そこで今，生じた渦環が単位時間，単位体積当たりの頻度 ν で位相スリップに寄与するとすれば，断面積 s の流れにおいて $\boldsymbol{v}_s$ の運動方程式は，

$$\frac{\partial v_s}{\partial t} = -\kappa\, s\, \nu \tag{6.12}$$

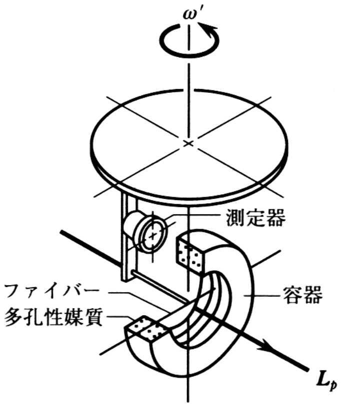
と与えられる。この式は後述の熱活性化過程による v_s の減衰を議論するときの基礎方程式となる。

ところで，位相スリップによる超流動速度の減速が実際どのような実験で測定されているかについて，以下では3つの異なったタイプの実験結果をとりあげよう。次節ではまず，トーラス容器内に誘起された回転超流動の減衰と臨界速度の測定について述べる。そして6–4節では，熱活性化過程に基づく理論，および測定結果との対比について考察する。6–5，6–6節では，比較的最近の興味ある2つの話題を取り上げる。

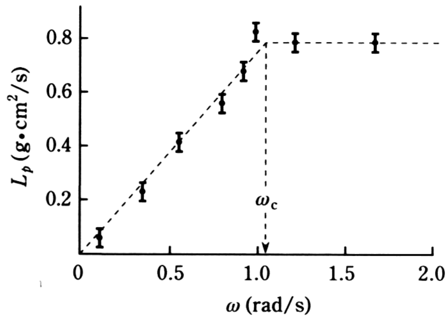
6–3 回転超流動の減衰と臨界速度

ここでは2つのグループにより実施された実験をとりあげる。いずれもトーラス容器内の多孔性媒質 (porous media) 中に回転超流動の永久流を誘起するが，測定手段が異なっている。

1. J.D.Reppy ら[7)~9)] は超流動ジャイロスコープとよばれる装置を用いて，トーラス容器内の回転超流動の角運動量を測定した。6·4図が装置の概



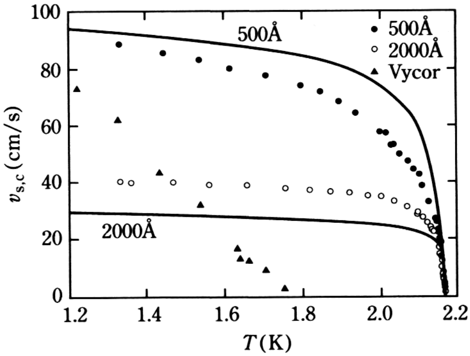
6·4 図 超流動ジャイロスコープによる L_p の測定



6·5 図 初期角速度 ω に対する角運動量 L_p の測定値。細隙サイズ 10μm, T =2.072K.

略で，容器内には細かい粒子をつめ多孔性媒質を作り，その間隙は超流動成分のみが流れる (常流動成分は粘性のため流れない)。最初に $T > T_\lambda$ の温度でトーラス容器を図の位置から水平面に傾け，トーラスの垂直な中心軸のまわりに角速度 ω で回転させる。そして $T < T_\lambda$に冷却し，その後で容器の回転を止める。そして容器をもとの (図の) 位置にゆっくりと戻す。そのとき容器内には超流動の永久回転流が実現され，それによる角運動量 $\boldsymbol{L}_p$が図のように生じる。

L_pの測定は次のような方法による。垂直軸のまわりに別の角速度 $\boldsymbol{\omega}'$の回転を与えて $\boldsymbol{L}_p$にトルク，$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\omega}' \times \boldsymbol{L}_p$ を加える。それは容器を支えているファイバーの振れとして現れるので測定器で測る。L_p の測定結果 (10 μm の細隙で T = 2.072K) を 6·5 図に示す。L_pは始めに与えた容器の角速度 ω に比例して増大するが，臨界値 ω_cに達すると ω にはよらない飽和値 $L_{p,c}$をとる。$L_{p,c}$の温度による変化も測定され温度の上昇とともに減少するという，超流動に特徴的な結果が得られた。角運動量は，2 章で議論した非古典的回転流のように，2 つの因子，超流動密度 ρ_sと平均の超流動速度 $v_s \equiv R\omega$ (Rはトーラスの平均回転半径) により，$L_p = C\rho_s v_s$と表すことができる。Cは容器の形による比例定数である。この実験では独立に ρ_sの温度依存性を求めることができる。得られた ρ_sの温度依存性と先の $L_{p,c}$のそ

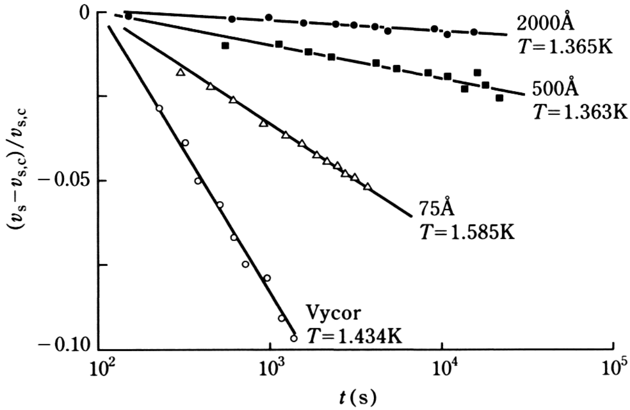


6·6 図 臨界速度 $v_{s,c}$ の温度と細孔の大きさによる変化。測定点[8]は 500Å (●), 2000Å (○), Vycor (▲). 実線は理論曲線[16]。

れを比べて，臨界速度 $v_{s,c} = R\omega_c$が得られる。その結果が 6·6 図[8]に示される。細隙の大きさ d が，$d = 500\text{Å}, 2000\text{Å}$ の場合 (これは Metricel filter とよばれる物質の細隙を用いている)，温度の低下にともない $v_{s,c}$の値は一定値に近づき，その大きさは定性的に d^{-1}の依存性をもつ。一方，温度が T_λ に近づくと，この 2 つの曲線は d によらずにゼロに近づく。図の実線で示される曲線は，6–4 節の後半で議論する，ポーラス媒質中での渦生成に対する活性化過程の理論から得られるものである。

さらに実験では，v_sの時間的な減衰の様子も測定された。始めに $v_{s,c}$よりわずかに小さい v_sの永久流の状態を準備し，その後温度を上げて臨界曲線 $v_{s,c}(T)$ の外側に出る。実験ではこの v_sに相当する $L_p(t)$ の時間的減衰が $10^2 < t < 10^4$sec にわたり測定された。6·7 図は相対減衰率，$(v_s - v_{s,c})/v_{s,c}$ をいくつかの細隙の大きさと温度に対して示したもので，時間 t の対数 $\log t$ で緩やかな減衰を表す。先にあげた，$v_{s,c}$が T_λに近づくとき細隙の大きさに関係なく同じ曲線に沿って，ゼロとなる実験結果，そして今述べた $v_s(t)$ が $\log t$ で減衰するという結果は，後述する理論的考察により定性的に説明される。

なお 6·6 図，6·7 図にある Vycor ガラス内での流れに対するものは，先のものとは事情が異なっている。Vycor ガラスは内径が 40Å 程度の空洞が虫穴 (wormhole) のように三次元的に張り巡らされた構造をもち，その中

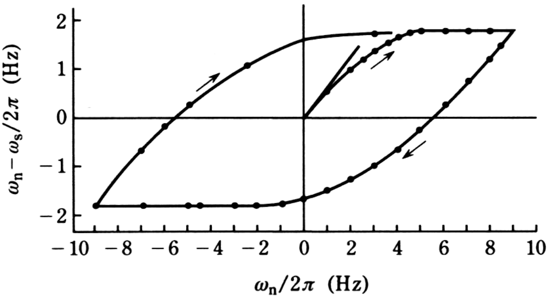


6·7 図 相対変化 $(v_s - v_{s,c})/v_{s,c}$の対数的減衰と細孔サイズおよび温度による依存性。

の超流動流が測定される。Vycor ガラスを用いた測定はその後も，ねじれ (torsional) 振動の方法，Helmholtz 振動の方法により，温度も 25 mK の極低温まで実施されてきた。そこでは Vycor ガラス内の超流体の量 (ρ_s) を，空洞内を完全に満たす場合から，極端に少なくして内壁に薄く吸着した膜の場合まで変化させ，ρ_s の温度変化や超流動転移温度の測定など興味ある結果を報告している。その詳細については最近の総合報告[10] を参照されたい。

2. H.Kojima ら[11),12)]の実験ではトーラス容器の回転に伴う超流動の速度を，同じ容器内に励起した第四音波の Doppler 効果を用いて測定したものである。トーラス容器内には Al_2O_3の微粒子 (粒径は 170 ~ 320Å) を充填し，垂直軸のまわりに回転させてスーパーリーク中に角速度 $\omega_n - \omega_s$の流れを作る。ここで ω_nは常流体の角速度であるが，今は容器の角速度 ω に等しく，ω_sは超流動の角速度である。容器は同時に第四音波の共鳴器として利用され，流れがあるときに生ずる第四音波の振動数の Doppler シフトを測定する ((5.59) を参照)。流れの方向に伝わる波の振動数と反対向きのそれとの差は，$\Delta\omega = 2m(\rho_s/\rho)(\omega_n - \omega_s)$ と与えられる。ここで m は音波のモード数 (トーラスの一周上に立つ波の数) である。したがって $\Delta\omega$ の測定から ω_sを知ることができる。先の実験 **1.** とは違って，容器の定常的な回転を維持 ($\omega_n \neq 0$) しての測定である。

6·8 図は $T < T_\lambda$の温度で静止状態 ($\omega_n = 0$) から ω_nを増加させた測

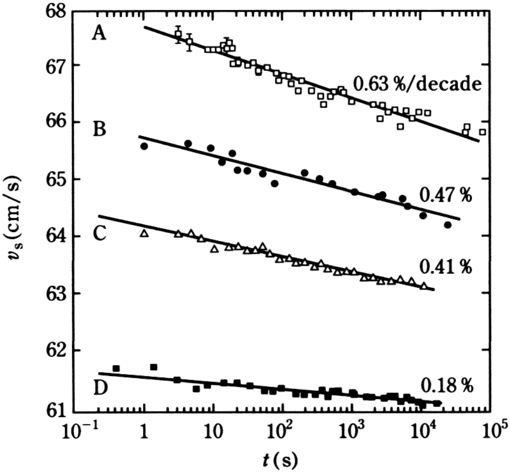


6·8 図　回転角速度 ω_n に対する超流動角速度 ($\omega_n - \omega_s$ で表される) の変化。

定結果である。相対角速度 $\omega_n - \omega_s$は ω_nとともに線形に増してゆくが，$\omega_n = \omega_{c1}(\omega_{c1}/2\pi \sim 1\text{Hz})$ に達すると線形からずれ始める。線形領域で誘起される超流動流の値は $\omega_s = 0.46\omega_n$ の関係にあり，これは古典流体力学で知られる Kelvin ドラッグ†によるものと考えられる。この領域では ω_nの増減に対し可逆的に振舞うことから，流れはポテンシャル流で渦は存在していないとみなされる。ω_nがある角速度 ω_{c1}を越すと渦糸が現れ初めて，その平均流により ω_sが増大する。さらに ω_nが増してゆくと，$\omega_n = \omega_c$で $\omega_n - \omega_s$は飽和して一定値 (飽和臨界角速度) となる。飽和値から容器を逆に回転して，ω_nを減少してゆくともとの径路を戻らず，図のようにヒステリシス曲線を描く††。これは存在している渦糸が微粒子の壁にピン止めされる結果，$\omega_n - \omega_s$の減少の仕方は最初の線形領域と同じ傾きを示していると考えられる。さらに ω_nが減少してゆくと，すでに存在している渦糸とは反対の渦度をもつ渦糸の発生により，図のような振舞いを示すと解釈されている。先の (非飽和) 臨界角速度 ω_{c1}は，トーラスの半径 R と細隙の断面の幅 d により，およそ $\omega_{c1} = \hbar/mRd$ と表され，先の Feynman の臨界速度 $\kappa/2\pi d$ の大きさに相当している。一方，ω_cに対応する飽和臨界速度 $v_{s,c}$

† 流体力学によると，非圧縮性完全流体の流れ v の中に球形物が置かれると，球が排除した流体の質量の 1/2 と v の積で与えられる運動量が流体に加わる。トーラス中に詰められた微粒子の体積の見積もりから，上記の値が近似的に確認されている。

†† タイプ II とよばれる超伝導体では磁束が内部に侵入し，磁場と磁化の間に類似なヒステリシス曲線が測定されている。



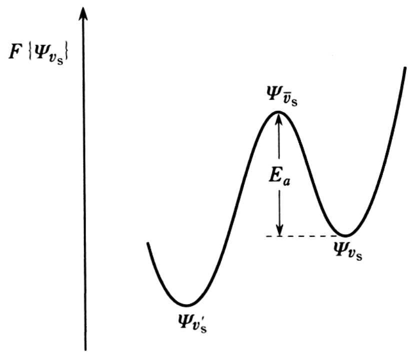
6·9 図 v_s の時間 t に対する対数的減衰。相対減衰率が 4 つの初期速度に対して示される。

$(=\omega_c/R)$ は，実験 **1.** で測定されたものと同じ性格のもので，これについては次節後半で議論する。

一方，この実験でも v_sの時間的減衰が測定され，先の実験と同じく，$\log t$での減衰が観測された。6·9 図は $T = 1.30$K で，いろいろな初期速度 v_s^0 の場合の減衰の様子を示したものである。直線 A は，飽和臨界速度の $v_s^0 = 67.7$cm/s に対するもので，$(1/v_s)dv_s/d(\log_{10} t)$ で定義される相対減衰率が 0.63%となることを表している。この時間的変化は，図に見られるように 10^5秒 (~24 時間) の経過で 2cm/s の減少であり，準安定状態にある超流動の流れが臨界速度に達して減衰するとはいっても，それは極めて緩やかなものであることを示している。初期速度が飽和臨界速度の 14%小さい値での実験では，減衰は見られず文字通り超流動は永久流となる。なお，6·9 図の測定結果は，ポーラス媒質での渦生成による活性化のモデル理論により説明可能であることを，次節後半で議論する。

6–4 熱活性化過程による超流動速度の減衰と臨界速度

上記 2 つの実験で共通にみられた結果——臨界速度 v_c の存在と $\log t$ に



6·10 図　自由エネルギー障壁と活性化エネルギー E_a

よる減衰率——に対する理論的考察は，有限温度での渦の生成とそれらが位相スリップに寄与する過程を対象とする統計力学に基づくもので，熱活性化過程の理論[7),13)]とよばれる。前にも述べたように，安定に v_s が流れている状態は，それが局所的なエネルギーの極小値に相当して準熱平衡が実現していることによる。ところが v_s の大きさがある臨界値 v_c に近くなると，渦——渦糸あるいは渦環——を生成するエネルギーは減少し，熱的ゆらぎによる渦の核生成が実現されるようになる。このとき 6-2 節で議論したように，空間的に一様安定な v_s 場は渦の生成で局所的に乱れ，エネルギーが安定な v_sの極小値に比べ高い状態となる。生成された渦は，超流動速度場の中で膨張あるいは収縮するが，それらのうちたまたま膨張して位相スリップに寄与する確率が有限となれば準安定状態は有限な寿命となる。この確率を支配する量は，熱的に越えなければならないエネルギー障壁の値で，活性化エネルギーとよばれる。

有限温度での超流動状態の自由エネルギーは，2 章で述べた秩序変数Ψの汎関数として表される。特に v_s の流れがあるときの変数を Ψ_{v_s} と書き自由エネルギーを $F\{\Psi_{v_s}\}$ と表せば，ゆらぎの統計理論により，この準平衡状態の実現する確率は Boltzmann 因子，$\exp[-F\{\Psi_{v_s}\}/k_B T]$ に比例する。

v_s から $v'_s(< v_s)$ の状態へ移るには，6·10 図に示すようにエネルギーの障壁 $F\{\Psi_{\bar{v}_s}\}$ を越えることが要求される。ここで $\Psi_{\bar{v}_s}$ は，Ψ がその関数空間で Ψ_{v_s} から $\Psi_{v'_s}$ にエネルギーの障壁を越えて移る経路の中では，最もエネルギーの低い鞍部点 (saddle point) の秩序変数を意味し，そこでの自由エ

ネルギー $F\{\Psi_{\overline{v}_s}\}$ は停留値である。このとき活性化エネルギー E_a は

$$E_a = F\{\Psi_{\overline{v}_s}\} - F\{\Psi_{v_s}\} \tag{6.13}$$

と定義される。E_aの具体的な評価はすぐ後でするが，一般にv_sと温度Tに依存すると考えられる。それは次のような次元解析による評価から理解される。v_s の流れにおいて，位相スリップが起きる局所的な体積 R^3の中に含まれる超流動の運動エネルギー $\rho_s v_s^2$ が E_a に寄与すると考えると，$E_a \sim R^3 \rho_s v_s^2$ となる。R として次元的に $R \sim (h/mv_s)$ ととれば，$E_a \sim \kappa^3 \rho_s / v_s$ となり，この v_s, ρ_s 依存性は後述の渦環生成による E_a と一致している。

ここで目的の v_sの運動方程式 (6.12) に戻ると，右辺の確率 ν はゆらぎの統計力学により E_aを用いて表され，

$$\frac{\partial v_s}{\partial t} = -\kappa\, s\, \nu_0 \exp\left[-\frac{E_a(v_s, T)}{k_B T}\right] \tag{6.14}$$

と書かれる。ここで ν_0は，渦の核生成が起きる頻度 (単位時間，単位体積当たり) である。v_sのある値に対し右辺の値が無視できるほどに小さければ，安定な準熱平衡状態とみなすことができる。一方，実験的に測定されている臨界速度 $v_{s,c}$は，右辺の値が観測可能なある値，Φ_0を与える速度として定義される；

$$\kappa\, s\, \nu_0 \exp\left[-\frac{E_a(v_{s,c}, T)}{k_B T}\right] = \Phi_0 \tag{6.15}$$

このような定義は確率過程として v_sの減衰を考える限り必然的なもので，温度に依存する臨界速度の意味を考えるうえでも適切であろう。さて v_sの振舞いを調べるにあたり，$v_{s,c}$近くでのそれに注目することにする。そのときには $E_a(v_s, T)$ を $v_{s,c}$のまわりで展開した形を用いればよく，(6.14) は

$$\frac{\partial v_s}{\partial t} = -\Phi_0 \exp[\alpha(v_s - v_{s,c})] \tag{6.16}$$

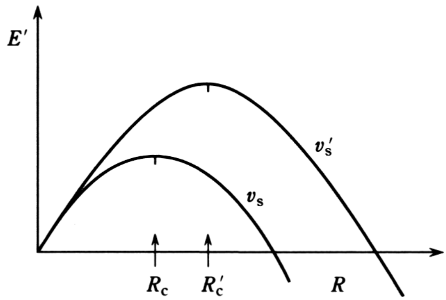
と書ける。ここで αは

$$\alpha = -\frac{1}{k_B T}\left(\frac{\partial E_a}{\partial v_s}\right)_{v_s = v_{s,c}} \tag{6.17}$$

である。(6.16) の解は初期値を v_0として

$$\begin{aligned} v_s(t) &= v_0 - \alpha^{-1} \ln[1 + \alpha\Phi_0 e^{\alpha(v_0 - v_{s,c})}\, t] \\ &\simeq v_{s,c} - \alpha^{-1} \ln[\alpha\Phi_0 t] \end{aligned} \tag{6.18}$$

となる。ただし 2 行目は，t が十分長く $\alpha\Phi_0 e^{\alpha(v_0 - v_{s,c})}\, t \gg 1$ のときに成り



6·11 図 半径 R の渦環エネルギー。v_s があるとき E' は臨界半径 R_c で最大となる。$R_c < R_c'$ $(v_s > v_s')$.

立つ近似式で，初期値 v_0 にはよらない形となる。(6.18) は先にあげた測定結果，$\log t$ 依存性と符合しており，その比較は後述する。

渦環生成による活性化過程　活性化エネルギー E_a の評価に当たり，半径 R の渦環が容器の壁からは十分離れて生成されるモデルを考える†。v_s 静止系での渦環のエネルギー E，自己誘導速度 v，インパルス P が

$$E = \frac{1}{2}\rho_s \kappa^2 R \left(\eta - \frac{3}{2}\right) \tag{6.19}$$

$$v = \frac{\kappa}{4\pi R}\left(\eta - \frac{1}{2}\right) \tag{6.20}$$

$$P = \rho_s \kappa \pi R^2 \tag{6.21}$$

で与えられる場合を考える††。ここで $\eta \equiv \ln(8R/a)$. このとき実験室系での渦環のエネルギー E' は，インパルスが超流動の流れ v_s と逆向きのときが最小で

$$E' = E - P \cdot v_s \tag{6.22}$$

と与えられる。E' は半径 R の変化に対し，6·11 図に見られるように臨界半径 R_c で最大値をとる。R_c は

† 以下の議論は，過飽和蒸気圧下にある気相の中に，熱的ゆらぎにより液滴が核生成される過程と類似している。これは均質核生成 (homogeneous nucleation) 過程とよばれ，壁面や不純物が核となる不均質 (heterogeneous) 核生成と区別される。

†† (6.19)，(6.20) は渦環の芯が，それをとりまく流体の圧力とつり合って半径 a の中空の構造をとるとしたときの表式で，$v = dE/dP$ の関係を満たす。先に与えた (3.49)，(3.50) とは数因子が少し異なる[14)]。

$$\frac{dE'}{dR} = \frac{dP}{dR}(v - v_{\rm s}) = 0 \tag{6.23}$$

を満たす R として決まる。ここで $dE/dR = (dE/dP)(dP/dR), v = dE/dP$ の関係を用いた†。したがって条件 $v(R_{\rm c}) = v_{\rm s}$ から $R_{\rm c}$は (6.20) から

$$R_{\rm c} = \frac{\kappa}{4\pi v_{\rm s}}\left(\eta - \frac{1}{2}\right) \tag{6.24}$$

で与えられる (6·11 図)。自由エネルギーが $R_{\rm c}$ で極値をとる (鞍部点での停留値) 条件は，実験室系での渦環の運動が定常 ($v(R_{\rm c}) = v_{\rm s}$) となることに対応しており合理的な結果である。このとき活性化エネルギー (6.13) は，$v_{\rm s}$ と $\rho_{\rm s}$ をパラメーターとして

$$E_a = E'(R_{\rm c}) = \frac{\rho_{\rm s}\kappa^3}{16\pi v_{\rm s}}\left(\eta - \frac{1}{2}\right)\left(\eta - \frac{5}{2}\right) \tag{6.25}$$

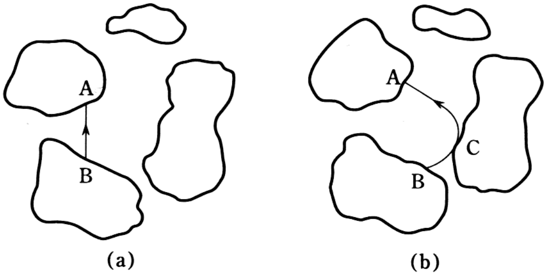
と与えられ，先に述べた次元解析の結果を再現している。$R < R_{\rm c}$の渦環はエネルギー的に収縮消滅し，$R > R_{\rm c}$のそれは膨張して位相スリップに寄与することになる。$v_{\rm s,c}$ は定義式 (6.15) から

$$v_{\rm s,c} = \frac{\rho_{\rm s}\kappa^3}{16\pi\gamma k_{\rm B}T}\left(\eta - \frac{1}{2}\right)\left(\eta - \frac{5}{2}\right), \quad \left(\gamma \equiv \log\frac{\kappa s \nu_0}{\Phi_0}\right) \tag{6.26}$$

と求まる。これを見ると $T \to T_\lambda$ のとき $\rho_{\rm s} \to 0$ に対応して，$v_{\rm s,c}$ もゼロとなる。この性質は先にあげた測定結果 (6·6 図) と定性的に一致している。また実験的に得られている $v_{\rm s}$ の $\log t$ による時間的減衰は，すでに述べたように (6.18) の形と一致しているので，その係数 γ は測定値との比較から知ることができ，温度が $T \sim T_\lambda$ では，$\gamma_{\rm exp} \simeq 46$ という結果が得られた。他方，理論的には γ (6.26) は ν_0, Φ_0 といったパラメーターを含むため，その評価を確定するのは困難であるが，一つの見積もりとして $\gamma_{\rm theor} \simeq 53$ が得られている。

これまで見てきたように，渦環の生成とその熱活性化過程の統計理論により，先の 2 つの実験結果は部分的，定性的には説明されるが，いくつかの疑問点も残す。実験では温度が下がり T_λ から離れた領域では，$v_{\rm s,c}$ は温度によらない一定値となるが，(6.26) では説明できない。より困難な問題は，上にあげた渦環の臨界半径 $R_{\rm c}$(6.24) が条件によっては，トーラス内充填物の細隙の長さ d より大きくなってしまうことである。これらの困難を回避する目的で提案されたのが次の議論である。

ポーラス媒質での渦生成による活性化過程　R.J.Donnelly[15),16)] らは超



6·12 図 ポーラス媒質中の渦糸モデル。
微粒子間に延びた渦糸 AB が (a)，流れ (紙面に垂直) により膨張，C に接触 (b)，その後 AC，CB が同じ運動の候補となる。

流動が微粒子の充填物の細隙を縫って流れる場合には，速度 v_s に無関係で細隙の大きさ d に依存する活性化エネルギーの存在を考慮して，熱活性化過程の再定式化を行った。簡単のため，v_sの流れとしては，それに垂直な断面が例えば6·12 図のような 1 つのチャネルを考え，隣りあう 2 つの粒子の壁が平均距離 d で隔てられているとき，それにまたがって延びた渦糸が流れに垂直に生成されるとする。この渦糸が流れを横切り膨らんで半径 d 程度の半円弧になり別の粒子に接して止まると想定する (6·12 図)。このときの活性化エネルギーを，$E_\pm = \varDelta E \pm p_c v_s$ の形にとり，

$$\varDelta E = \frac{\rho_s \kappa^2 d}{4\pi} \ln \frac{d}{a}, \qquad p_c = \rho_s \kappa d^2 \tag{6.27}$$

と仮定する†。a は渦芯の半径である。p_cはインパルスの臨界値 (前項の渦環の問題では $P(R_c)$ に相当) である。ここでは $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{v}_s = \pm p_c v_s$と近似し，渦糸の渦度の 2 つの向き (したがって $\boldsymbol{p}$ の 2 つの向き) を考慮して v_s方向への一次元的な寄与のみを残している。そして前項の渦環の議論では無視した活性化エネルギーの大きい E_+による逆過程も，v_sがあまり大きくなければ競合すると考える (competing-barrier model)。

このとき v_s の運動方程式は，

† 始めに生じた直線の渦糸のエネルギーは，$E_i = (\rho_s\kappa^2 d/4\pi)\ln(d/a)$，半円弧のそれは $E_f = \pi E_i$ であるから，活性化エネルギーは $\varDelta E = E_f - E_i \sim E_i$ と数因子 1 の範囲で与えられる。直線から半円弧への変化のインパルスは，$p_c = \rho_s\kappa\pi d^2/2$ であるが同じ理由で (6.27) を得る。

$$\begin{aligned}\frac{dv_{\rm s}}{dt} &= -n_v\kappa f\left(\exp\left[-\frac{E_-}{k_{\rm B}T}\right]-\exp\left[-\frac{E_+}{k_{\rm B}T}\right]\right)\\ &= -2n_v\kappa f\exp\left[-\frac{\Delta E}{k_{\rm B}T}\right]\sinh\frac{p_{\rm c}v_{\rm s}}{k_{\rm B}T}\end{aligned} \tag{6.28}$$

と書かれる。n_v は単位長さ当たりの渦糸の個数，f は渦糸が単位時間に膨らむことを試みる頻度 (attempt frequency) である。ここで速度と時間を無次元化して

$$\begin{aligned}V &= \frac{p_{\rm c}v_{\rm s}}{k_{\rm B}T}, \qquad \tau = \nu_0 t\\ \nu_0 &= \nu\exp\left[-\frac{\Delta E}{k_{\rm B}T}\right], \qquad \nu\equiv\frac{2n_v\kappa f p_{\rm c}}{k_{\rm B}T}\end{aligned} \tag{6.29}$$

を導入すると，(6.28) は

$$\frac{dV}{d\tau} = -\sinh V \tag{6.30}$$

となる。この解は初期値を V_0 として

$$V = \ln\left(\frac{[1+e^{-\tau}\tanh(V_0/2)]}{[1-e^{-\tau}\tanh(V_0/2)]}\right) \tag{6.31}$$

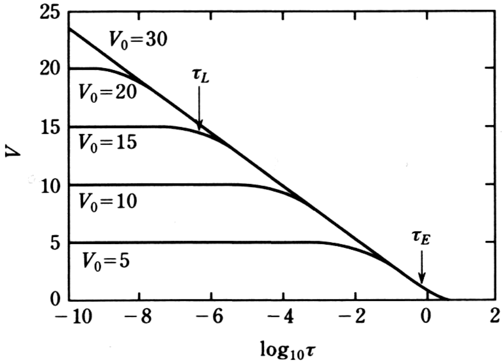
と求まる。この解は

$$\tau_L = 2\exp(-V_0), \qquad \tau_E \simeq 1 \tag{6.32}$$

で定義される 2 つの特徴的な時間スケールにより，その振舞いを変えることがわかる。$\tau_L \gg \tau$ では初期値はほとんど変わらず $V \simeq V_0$；$\tau_L \ll \tau \ll \tau_E$ では対数的減衰を示し，$V \simeq \ln(2/\tau)$；$\tau_E \ll \tau$ では指数的な減衰 $V \simeq 2\exp(-\tau)$ となる。6·13 図 ($k_{\rm B}T/p_{\rm c} = 4$ ととられている) にはいくつかの V_0 に対してその様子が描かれている。そして $V_0 = 15$ のときの τ_L が矢印 ($\log_{10}\tau_L = -6.2$) で示されている。この図からわかるように，$V_0 \geq 15$ の初期値をもつ速度は，時間 τ が $\log_{10}\tau = -6.2$ となるまで経過すれば V_0 によらない同じ値となる。したがって各 V_0 に対し，観測時間が $\tau = \tau_L$ に達した時点で，流れは実験的に測定された飽和臨界速度 $V_{\rm s,c}$ となると考えられる。(6.29) により $V \simeq \ln(2/\tau)$ をもとの次元に戻せば，

$$v_{\rm s}(t) = \frac{\Delta E}{p_{\rm c}} - \frac{k_{\rm B}T}{p_{\rm c}}\ln\frac{\nu t}{2} \tag{6.33}$$

となる。第一項は (6.27) から $\Delta E/p_{\rm c} = (\kappa/4\pi d)\ln(d/a)$ となり，ポーラス媒質における Feynman の臨界速度に相当し温度には依存しない。第二項は温度と細隙のサイズに依存し，時間の対数での減衰を表している。その傾きは



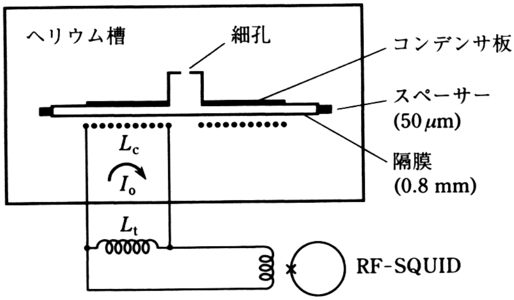
6·13 図 初速度 V_0 をパラメーターとした (6.31) 式 ($k_BT/p_c = 4$) のプロット。$V_0 = 15$ に対する τ_L が図示。$\tau_L < \tau < \tau_E$ の領域では対数的に，$\tau_E < \tau$ では指数的に減衰。

$$dv_s/d(\log_{10} t) = -(k_BT/p_c)\ln 10$$

を与える。そこで先の Kojima らによる測定結果，6·9 図の曲線 A と比較してみる。そこでは，初期 ($t = 1$s) の飽和臨界速度 67.7cm/s に対して減衰率 0.63%であった。これは $dv_s/d(\log_{10} t) = -67.7(\mathrm{cm/s})\times 0.0063 = -0.43\mathrm{cm/s}$ となる。一方，測定条件，$\rho_s = 0.139\mathrm{g/cm^3}$，細隙の平均サイズとして $d = 250$Å を考慮すれば，(6.27) の p_c を評価できる。この値と測定温度 $T = 1.3$K を用いると，$-(k_BT/p_c)\ln 10 = -0.47$cm/s が得られ，よい一致とみなせる。また (6.33) で $t = 100$ s としたときの速度 v_sを，飽和臨界速度 $v_{s,c}(T)$ とみなして計算した曲線が先に示した 6·6 図の実線である。これは飽和角運動量 $L_{p,c}$ から得られた 2 つの臨界速度の測定値と数因子 1 の範囲で一致しているとみてよい。

6–5 2π 位相スリップによる不連続的散逸と臨界速度

O.Avenel[17),18)] らは超流動速度が臨界速度に達したとき，2π を単位とした位相スリップが離散的に起き，これに対応して超流動エネルギーの散逸が不連続的に観測されることを示唆する実験に成功した。この実験はもともと超伝導で知られている Josephson 効果が，液体ヘリウムでも観測可能ではないかという期待で，以前から実施されてきたものである。しかしこの実験では，Josephson 効果の直接測定ではなく，2 π 単位の位相スリップ

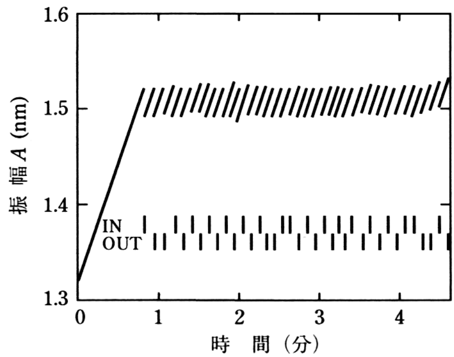


6·14 図　細孔を通して超流動ヘリウムを駆動する振動装置。隔膜の振動変位は，RF-SQUID により 10^{-13}m の精度で検出できる。

の検証に成功し，さらに臨界速度が 10mK の極低温まで温度依存性をもつことを見いだした点で興味あるものである。そしてこのような極低温での渦の生成と，それが位相スリップに寄与する機構に対して新たな問題を提起した。

2π **位相スリップの実験的検証**　6·14 図が装置の概要図である。10mK の低温まで冷やせる液体ヘリウムの槽，その中に漬けられた共振器，外部の RF-SQUID の測定器から構成されている。内部の体積が 7mm^3 という小さな共振器 (Helmholtz resonator のミニチュア版) は，Ni の薄膜に開けられた細孔 (面積は 0.3 μm×5 μm，厚さは 0.2μm) の部分，それを支えるコンデンサーの板，それに平行にスペーサーを挟んで弾力性のある隔膜からなっている。両面に Al 箔が付けられている隔膜 (Al-Kapton diaphragm) は電気的駆動で振動し，その際細孔から超流動流を出入させる。隔膜の変位は，それに面したコイルの係数 L_c の変化を通して RF-SQUID の電圧変化として測定される。隔膜の変位は 10^{-13}m という高精度で検証されるのがこの実験の特徴である。

共振器の振動数を $\Omega = 2.81\text{Hz}$ に保ち，隔膜の振幅 A を徐々に増してゆくと，ある臨界の振幅 A_c に達したとき突然不連続的に A は減少する。6·15 図はそれを示したもので，A_c 付近の振動を持続している限り，時間の経過に対し不連続変化は繰り返し起きて鋸の歯のような振舞いを示す。この減少は，数 ms(ミリ秒) 以下の短時間内で，振動の各半周期ごとの隔膜の速度が最大のときに，この不連続変化は起きていることが確かめられて



6·15 図　隔膜の振動振幅 A の不連続変化。
駆動電力 2.4×10^{-18}W を一定に保つ測定で，臨界振幅 A_c の付近での不連続的変化が，下部に示されるように流入 (IN)，流出 (OUT) に際して速度が最大のときに起きている。

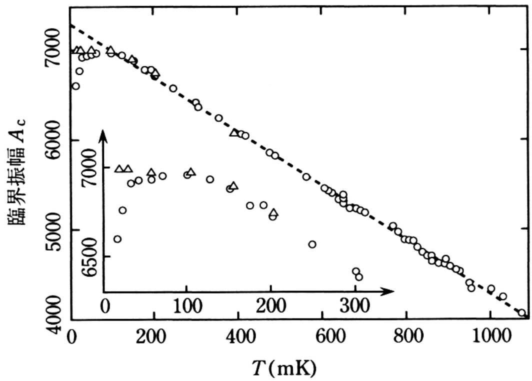
いる。振幅の減少幅 ΔA は $\Delta A/A_c = (0.0187 \pm 5)\%$ と検出され，1 回の ΔA に伴う共振器のエネルギー損失 ΔE は，SQUID の電圧変化を通して測定され $\Delta E = 1.21 \times 10^{-17}$J の結果が得られた。一方，細孔を出入りする超流動速度が臨界速度 v_c に達して，2π 位相スリップが起きたことによる超流動エネルギー損失 ΔE は，(6.10) で見たように超流動成分のみが寄与することを考慮して

$$\Delta E = \kappa J_c, \qquad J_c = \rho_s s v_c \tag{6.34}$$

と与えられる†。ここで J_c は細孔の面積 s を通過する臨界質量流であるが，これは有効面積 S の隔膜が振幅 A_c で押し出す質量流 $J'_c = \rho_s S \Omega A_c$ に等しい ($J'_c = J_c$) はずである。この J'_c の値は実験的 (S の測定精度に敏感に依存する) に求められるので，これを (6.34) に用いると，$\Delta E = \kappa J'_c = 1.01 \times 10^{-17}$J という結果になり，誤差の範囲内で上記の直接の観測値とよい一致を示している。この結果から，実験で見られた不連続なエネルギー損失が，2π 位相スリップにより起きたものと結論される。

臨界速度の温度依存性　　6·16 図が測定結果の最近の代表例[20]である。この結果は後述する別の装置での測定である。縦軸は共振器の臨界振幅 A_c がとられているが，これは上述の議論から v_c に翻訳される。この結果の特徴は，まず臨界速度 v_c が高温から $T_q \simeq 150$mK の低温まで近似的に温度に比例して増大し，定数 T_0 として $T_0 = 2.45$K を選ぶと

† (6.34) は ac Josephson 効果と密接な関係にあることが指摘されている[19]。



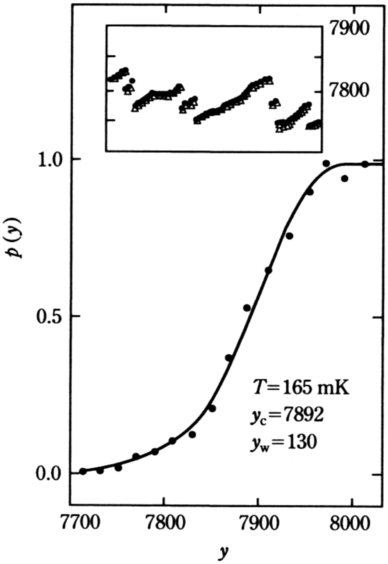
6·16 図 臨界振幅 A_c の温度変化 (縦軸は任意スケール)。挿入図は低温の極限で，不純物 ^{3}He の濃度 x_3 の敏感な依存性を示す。$x_3 = 0.9$ ppb が△印，$x_3 = 7$ ppb が○印。

$$v_c = v_{c0}\left(1 - \frac{T}{T_0}\right) \tag{6.35}$$

と表されることである。そして超高純度 (不純物としての^{3}He の濃度が 0.9 ppb(0.9/10^9)) の場合には，T_q 以下の温度で飽和して一定値となる。しかし^{3}He の濃度がわずか 7ppb になると影響が現れ，図のように再び減少する。これらの振舞いは，少し異なった実験手段で別のグループ[22] でも確かめられている。

6·16 図の結果は，先の実験とは少し異なる装置での測定である[19),21)] (6·14 図の装置を用いた測定[18)] もある)。共振器には細孔の他にそれと平行にもう一つの長い円筒の孔 (断面の大きさは細孔に比べて大) が開けられた共振器 (double-hole resonator) が用いられた。円筒を通る流速は臨界速度以下になっており，そこでは位相スリップは起きない。しかしこのときには，2 つの孔にまたがった流体の径路に循環が生じ，それは細孔の流れには寄与するが，隔膜の振幅の不連続変化には寄与しない。

測定は，振動の各半周期ごとに対応して，細孔に外向き内向きの流れを持続的に作り，長い時間にわたって観測される振幅の不連続変化をすべて記録する。この測定で見られた特徴は，不連続変化に対する位相スリップを $2\pi n$ と表すと，n が 1 から 4，場合によってはもっと大きい n のものが



6·17 図　位相スリップの起きる振幅 y に対する統計分布 $p(y)$。温度を固定 ($T = 165$mK) し，1000 個程度の測定点の統計。y の平均値として臨界振幅 y_c とその有効幅 y_w が決められる。内挿図は，振動の各半周期ごとの y の測定点で，流出時 (●)，流入時 (△) の位相スリップが交互に数回も続いて起き，途中カスケード的な大きい変化も示している。

起きていると同定されたことである (6·17 図の上部挿入図)。そして個々の位相スリップが起きる振幅 y に対する統計分布 $p(y)$ がいくつかの温度で求められた (6·17 図)†。6·16 図の点線はこれらのデータを解析 (後述) することにより得られたものである。

さて，(6.35) の温度依存性を理解するためには，それがいかに低温であろうと，熱活性化過程が働いていると考えるのが自然であろう[4)]。まず単純な現象論として，生成された渦が位相スリップに寄与する際の活性化エネルギーとして，2 つのパラメーター E_0 と v_{c0} を含む

$$E_a = E_0(1 - v_s/v_{c0}) \tag{6.36}$$

の形を仮定する。そして位相スリップによる熱活性化過程の確率 (単位時間当たり) を

† 振幅が統計変数となるので，ここでは A の代わりに y を用いている。

$$\Gamma(v_s) = \Gamma_0 \exp\left[-\frac{E_a(v_s)}{k_B T}\right] \tag{6.37}$$

とする。Γ_0 は渦の生成確率である。臨界速度 v_cは，前節の議論と同様に $\Gamma(v_c) = \Gamma_{obs}$ で定義すると，

$$v_c = v_{c0}\left[1 - \frac{k_B T\gamma}{E_0}\right] = v_{c0}\left(1 - \frac{T}{T_0}\right) \tag{6.38}$$

となり，(6.35) を再現する。ここで $\gamma \equiv \ln(\Gamma_0/\Gamma_{obs})$，$T_0 \equiv E_0/\gamma k_B$ とおいた。γ の適当な評価と実測値 $T_0 = 2.45\mathrm{K}$ を用いて，$E_0 \sim 110\mathrm{K}$ と見積もられた。これらの結果は以下で述べるより詳しい評価からも得られる。

一方，観測では，上に述べたようにより広い情報を含む分布関数 $p(y)$ が得られているので，その解析のための考察[4)]がなされた。共振器の運動 (その半周期を t_fとする) により駆動される v_s の時間変化を $v_s(t) = v_p \sin(\pi t/t_f)$ とする。$t = 0$ から始めて，1 回の位相スリップが $0 \sim t_f$ の間に起きる確率分布を $p(v_s)$ とする。これは条件付き確率密度 $\Gamma(v_s(t))$ を用いて

$$p = 1 - \exp\left[-\int_0^{t_f} dt\, \Gamma_0 \exp\left(-\frac{E_a(v_s(t))}{k_B T}\right)\right]$$

と与えられる[†]。この積分には主に v_sの最大値 v_p近くが寄与することを考慮して，

$$p(v_p) = 1 - \exp\left[-\Gamma_0 t_f \left(\frac{2k_B T v_{c0}}{\pi v_p E_0}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{E_0}{k_B T}\left(1 - \frac{v_p}{v_{c0}}\right)\right)\right] \tag{6.39}$$

と近似できる。この取り扱いでは，臨界速度を v_pに対する分布が$p(v_p) = 1/2$ となるときの値として定義するのが適当であろう。このとき

$$v_c = v_{c0}\left(1 - \frac{k_B T}{E_0}\ln\left[\frac{\Gamma_0 t_f}{\ln 2}\left(\frac{2k_B T v_{c0}}{\pi E_0 v_c}\right)^{1/2}\right]\right) = v_{c0}\left(1 - \frac{T}{T_0}\right) \tag{6.40}$$

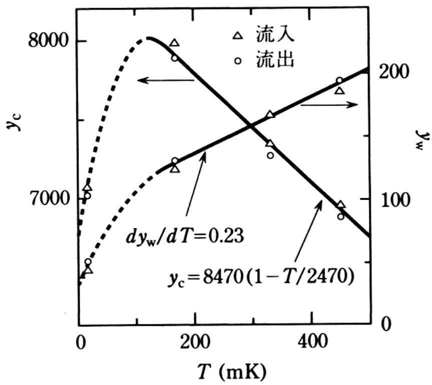
を得る。最後の表式では，T_0 と γ が次式により導入された。

---

† 確率論により，スリップが $t \sim t + dt$ の間に起きる確率密度を $q(t)dt$ とすれば，確率分布 $p(t)$ は $p(t) = \int_0^t q(t')dt' = 1 - \int_t^\infty q(t')dt'$ と表される。ただし条件 $p(0) = 0$,　$p(\infty) = 1$ を満たす。このとき (6.37) は t に依存する条件付き確率 $\Gamma(t)$(時刻 t まではスリップが起きず，t で始めて起きる) となるが，これを用いて $p(t)$ は，

$$\Gamma(t)\,(1 - p(t)) = q(t) = dp(t)/dt$$

の関係を満たす。これを積分すれば，$\ln(1 - p(t)) = -\int_0^t \Gamma(t')dt'$，したがって $p(t) = 1 - \exp\left[-\int_0^t \Gamma(t')dt'\right]$ を得る。



6·18 図　y_c (左縦軸) と y_w (右縦軸) の温度変化。図中の y_c の温度変化の実験式を v_c に翻訳したものが，本文 (6.35) 式。

$$E_0 = \gamma k_B T_0 \tag{6.41}$$

$$\ln\left[\frac{\Gamma_0 t_f}{\ln 2}\left(\frac{2k_B T v_{c0}}{\pi E_0 v_c}\right)^{1/2}\right] \simeq \ln(\Gamma_0 t_f) = \gamma \tag{6.42}$$

ただし γ の表式は，$T < T_0$ の領域での近似式である。さらに，分布 $p(v_p)$ の広がり (有効幅) を，$\Delta v_c = (dp/dv_p)^{-1}|_{v_c}$ と定義すれば，(6.39) から近似的に

$$\Delta v_c = \frac{2v_{c0}k_B T}{E_0 \ln 2} \tag{6.43}$$

を得る。

6·17 図[21]は T =165mK での $p(y)$ の測定値で，先の定義による臨界振幅 y_c と有効幅 y_w が図に示されている。y_c と y_w の 4 つの温度に対する変化が 6·18 図[21]に示される (y_c の振舞いは 6·16 図の挿入図に対応するものである)。$v_c \propto y_c \Omega$ により v_c の温度依存性を表した実験式が (6.35) であるが，これは上の現象論から導かれた (6.40) により再現されている。一方，y_w の測定値も，付加定数†を別にすれば，温度に比例しているので，これも (6.43) と符合している。$\Delta v_c/v_c = y_w/y_c$ に注意し，両者の温度係数の比較から，E_0 = 106K(1.5×10^{-21}J) を得る。この E_0 と T_0 = 2.45K を

† $T = 0$ でも残るように見えるゆらぎ幅 y_w は，実験的に避けられない力学的振動によるものと推察されている。

用いると，(6.41) から $\gamma = 43$，そして (6.42) から，$t_f = 56\mathrm{ms}$ を用いて $\Gamma_0 = 7.75 \times 10^{19}/\mathrm{s}$ を得る。これら一連の評価は，(6.38) の下で述べたものとよい一致を示している。

以上，実験データとその現象論的解析を見てきたが，そこに導入されたパラメーター，E_0 と v_{c0} がどのような物理的意味を持つのかが残された問題である。これらに対する議論[4),20)] もすでに提出されてはいるが，その詳細は省略し，いくつかの問題点を指摘しておく。最初に述べた 2π の位相スリップに伴う散逸エネルギー ΔEに比べると，活性化エネルギー E_aは4桁ほども小さい。これは核生成エネルギーに寄与する渦の長さが細孔のサイズに比べてはるかに短いことを意味している。実際に提示されている議論では，細孔の壁に両端をもつ 20 ～ 50Å の渦糸が，壁の近くで平均の超流動速度よりは速い局所的な流れにより出現し，熱活性化過程により位相スリップに寄与するモデルを採用し，近似的に実験結果の説明に成功している。しかしそこでは渦糸の芯のサイズをかなり大きくとっており，このような微視的サイズでの渦糸の生成では，古典的な描像が適用できなくなること，特に渦糸の芯の量子的構造が問題となることを示唆している。さらに局所的な超流動速度は 10 ～ 40m/s に達する可能性を指摘しているが，この値は次節で述べるイオンの運動による渦生成の臨界速度に近いものであり，両者の類似性が今後の問題となるであろう。

6–6　イオンによる渦生成

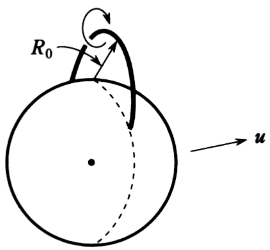
3章で見たように，Rayfield と Reif はイオンによる渦環の生成の実験により，循環の大きさ κ と渦芯の半径 a の同定に成功したが，その後も超流動中のイオンの運動についての研究は数多く試みられてきた。中でもランカスター大学では，ロトンの自発放出や，渦の生成によるイオンの減速等，多くの興味ある実験結果を発表してきた。ここでは渦の核生成率についての最近の測定結果に注目する。一方，イオンの臨界速度と渦の生成機構に関する理論的考察も提出されており，それは実験結果の解析に当たり基本的な役割を演じている。

イオンによる渦生成の理論的考察　　これまでいくつかの提案がなされてきたが，ここでは C.M.Muirhead ら[23),24)] が行った考察について，その概略を記し以下に述べる実験結果の解析の基礎とする。内容は2つの部分

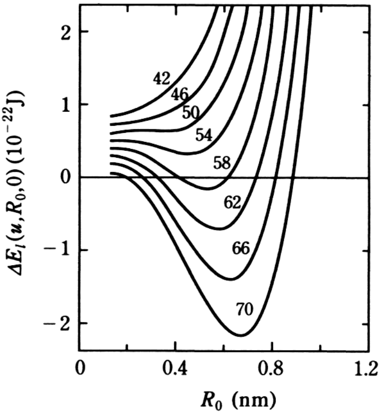
に分かれ，1つは速度 u で動くイオンが渦環あるいは渦糸のループを生成するときの幾何学的形に応じたエネルギーの計算である。2つめは渦糸のループが有限質量を持つとして，その量子力学的運動を考察することにより，量子的トンネル効果としての渦生成の確率を評価するものである。まず最初の考察について述べる。

3–5節，渦環の実験の項で述べたように，液体ヘリウム中の電子は，自身の零点運動によるヘリウム原子の排除効果と液体圧力とのつり合いから，蒸気圧下では半径 17Å，融解圧では 11Å の泡 (bubble) を形成し，負電荷と有効質量をもつ球状物体 (以下ではイオンとよぶ) として運動する。絶対零度を考え，イオンの速度 u が臨界速度を越えるところで渦が最初どのように生成されるかについて，彼らは2つの場合，イオンのまわりにそれを取り巻く形で渦環 (ring) が生成される場合と，イオン表面に両端をもつ渦糸のループ (loop) ができる場合を比較検討した。イオンと渦 (環あるいはループ) の複合系のインパルスは保存することを要求し，その際イオンのインパルスは u に比例するとして，渦生成に伴うエネルギー変化 ΔE を計算した。その結果エネルギー的に最も起こりそうな配置は，イオン球面上に小さな曲率半径 R_0 の渦糸のループができるというものである (6·19図)。その結果を詳細に表した一つの例が6·20図であり，これは圧力を $P = 17.5 \times 10^5$Pa(17.5bar)，渦芯の半径を $a = 0.152$nm(1.52Å) としたときのものであり，イオンの速度 u(m/s) をパラメーター (曲線の上の数値) として表した生成エネルギー $\Delta E_l(u, R_0, 0)$ の R_0 に対する振舞いである†。図を見ると $u \simeq 57$m/s の速度に達すると $\Delta E_l = 0$ となり，$R_0 \simeq 0.5$nm のループがエネルギー・コストなしで生成されることを示している。一方，計算では，$R_0 > a$ に限られているが，$R_0 = 0$ は渦のない状態に相当し当然ながら $\Delta E_l = 0$ である。したがってイオンの速度が臨界速度 $u \simeq 57$m/s に達すると，渦のない状態が準安定となって，渦のループが生じた状態への移行が実現する。$T = 0$ では，これは $R_0 \simeq 0.2$nm (図参照) にあるエネルギー障壁 $\varepsilon_b \equiv \Delta E_l \simeq 0.5 \times 10^{-22}$J ($\varepsilon_b/k_B \simeq 3.6$K) を量子的にトンネルすることにより起きる。有限温度になれば，この ε_b に対する熱活性化過程が付け加わり，渦の生成確率は温度とともに増大することが期待される。そこで次に実験結果のいくつかに注目し，上記の理論的考察を基礎にどの

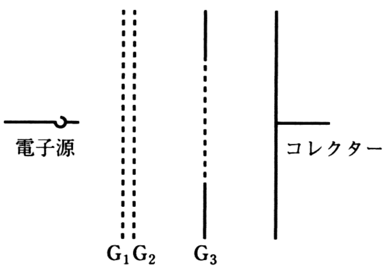
† ΔE_l の中の変数0は，地球に見立てたイオン球が南から北に u で運動しているとき，ループの両端が赤道上にあることを意味する (6·19図)。



6·19 図 速度 u のイオンの球面上に生成された半径 R_0 の渦糸ループ。渦糸の両端は赤道 (点線) 上に接する。



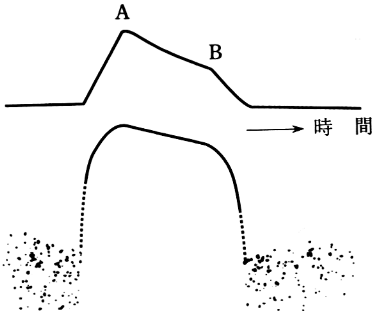
6·20 図 半径 R_0 の渦糸ループの生成エネルギー $\Delta E_l(u,R_0,0)$ (0 は渦糸の端が赤道上にあることを示し，このとき，ΔE_l は最小になる)。パラメーターはイオン速度 u (m/s)。$u \simeq 57$m/s で $\Delta E_l \simeq 0$ となる。



6·21 図 渦の核生成率を測定する電気誘導装置

ような解析がなされたかを見ることにする。

渦生成率の測定結果と解析[25),26)] 6·21 図は渦の核生成率を直接測定する目的で考案された電気誘導 (electric induction) 装置[27)]の概要である。電子源から放出された電子によるイオンの集団は，グリッド G_1, G_2 に加えられたパルス電場により引き寄せられる。グリッド G_3 に届いた電子は G_3とコレクターの間にかけられた電場 E ($10^3 \sim 10^6$V/m) により加速され，コレクターに届いたイオンは外部回路の電流として測定される。G_3 と



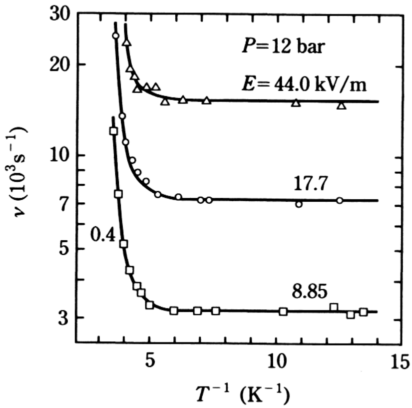
6·22 図　コレクターが受ける誘導電流のシグナル。AB 間はイオンと渦 (環またはループ) の複合体による電流で，それが指数関数的に減衰していることは上図の対数をとった下図から確認できる。

コレクターの間を移動する過程で臨界速度 (~ 60m/s) に達したイオンは，渦環あるいは渦のループを生成してイオンと渦の複合体を作る。その結果，急激に減速 (数 mm/s 程度まで) してコレクターには届かず電流には寄与しなくなる。イオンによる渦の核生成は確率的に起きると考えられるから，その生成率を ν とすれば，以上の過程の解析から最終的に電流の減衰は，$I(t) = I_0 \exp(-\nu t)$ と表されることが示された。この電流の時間的変化の測定結果が 6·22 図に示される。最初の立ち上がりは，円盤状のイオンがグリッド G_3 を通過する時間のシグナルである。A から B でイオンと渦の複合体生成による減衰が起き，それが指数関数の減衰であることは，シグナルの対数をとった下図で直線となることから確認される。

渦の生成率 ν は電場 E の他に圧力 P と温度 T に強く依存すること，さらに不純物としての ^{3}He の濃度に著しく影響されることが，実験から明らかになっている。まず最新の ν の測定結果に注目する。6·23 図は圧力が $P = 12$bar，3 通りの電場に対するもので，各々の ν の温度変化が，T^{-1} でプロットされている。その振舞いは，3 個のパラメーター $\nu_0(E)$, A, ε_b を用いて

$$\nu(T, E) = \nu_0(E) + A\,T \exp(-\varepsilon_b/k_B T) \tag{6.44}$$

と表される。$T \lesssim 0.2$K までは温度によらない一定値 $\nu_0(E)$ であり，温度が上がるとエネルギー障壁 ε_b に対する熱活性化過程の寄与が現れること

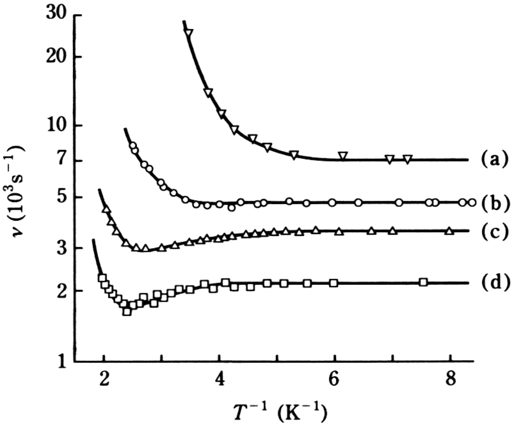


6·23 図 イオンによる渦の生成率 ν の測定。$P = 12\mathrm{bar}$，3 通りの電場に対する温度変化。実線は (6.44) 式で $\varepsilon_{\mathrm{b}}/k_{\mathrm{B}} = 2.4\mathrm{K}$ ($\nu_0(E)$，A も適当に選ぶ) とした曲線。

を示している。ε_{b} の値を，電場の値にかかわらず $\varepsilon_{\mathrm{b}}/k_{\mathrm{B}} = 2.4\mathrm{K}$ ととって測定値に適合させたのが図の曲線でよい一致が見られる。この ε_{b} の値は，先に議論した渦糸のループがイオンの表面に現れるとして計算されたエネルギー障壁 $\varepsilon_{\mathrm{b}}/k_{\mathrm{B}} \simeq 3.6\mathrm{K}$ (圧力は少し異なるが) とよい一致を示している。そして $\nu_0(E)$ の項は，このエネルギー障壁 ε_{b} を量子力学的なトンネル過程で遷移する確率とみなすことができる。ε_{b} の存在を認めると，第 2 項の温度依存性はフォノンが関与する活性化過程として理解される。イオンおよびフォノンの速度を $\boldsymbol{u}, c$ とするとき，$\hbar ck \geq (\varepsilon_{\mathrm{b}} + \hbar\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{u})$ を満たす波数 $\boldsymbol{k}$ のフォノン (その個数を n とする) が，イオンとの相互作用 (その散乱断面積を σ とする) により渦糸ループの生成に寄与するとする。$\hbar\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{u}$ の項は $c \gg u$ から無視でき，σ は波数にはよらないと仮定すれば，渦の生成率 $\nu = c\sigma n$ は

$$\nu(T) = \frac{c\sigma}{2\pi^2}\int_{\varepsilon_{\mathrm{b}}/\hbar c}^{\infty} dk k^2 \exp(-\hbar ck/k_{\mathrm{B}}T)$$
$$\simeq \frac{\sigma\varepsilon_{\mathrm{b}}^2 k_{\mathrm{B}}T}{2\pi^2\hbar^3 c^2}\exp(-\varepsilon_{\mathrm{b}}/k_{\mathrm{B}}T) \qquad (6.45)$$

となり，(6.44) の第 2 項を再現する。実験から得られた係数の適合値 $A = (1.2 \pm 0.1) \times 10^8/\mathrm{s}$ と $c = 312\mathrm{m/s}$ ($P = 12\mathrm{bar}$ での値) から，$\sigma = 2\mathrm{Å}^2$ が



6·24 図 (a) $P = 12$bar, $E = 17.7$kV/m, (b) $P = 15$bar, $E = 31.0$kV/m (c) $P = 17$bar, $E = 62.0$kV/m, (d) $P = 19$bar, $E = 97.0$kV/m.
曲線は (6.46) 式で適当にパラメーターを選び適合させたもの。

得られるが，これは微視的な渦糸に対する断面積としてもっともらしい値である。しかし σ を与える微視的な相互作用の機構については，未だ議論されていない。

圧力を上げてゆくと (15bar $< P <$ 20bar)，6·24 図に見るように ν は低温の一定値から温度の上昇に際して小さな極小値を経てから熱活性化過程に移行する。これは (6.44) の ν_0 が温度とともに減少することを示唆している。これを説明するのに提出された考察の一つ[25)]は，量子トンネル過程に対する散逸の影響を考慮するものである。これは渦糸のない状態からエネルギー障壁 ε_b をトンネルして，渦糸ループの生じた状態に遷移する際，まわりの系との相互作用を通してその確率が減小する効果[†]である。今は熱的に存在するフォノンがこの役割を担うと考える。フォノンの熱的励起の個数が T^3 に比例することを考慮して，渦糸生成の確率に減衰因子 $\exp(-BT^3)$ が付加されると考えれば，(6.44) は

$$\nu(T,E) = \nu_0(E)\exp(-BT^3) + AT\exp(-\varepsilon_\mathrm{b}/k_\mathrm{B}T) \qquad (6.46)$$

の形に修正される。ここで B と ε_b は電場には依存しないとし，圧力には

† この問題は A.C.Caldeira と A.J.Leggett[28)] により最初に議論された。巨視的系の量子トンネル現象において，環境との相互作用により現れる散逸効果を評価したものである。

滑らかに変化するとして測定点に適合させたのが6·24図の実線である。このとき ε_b は圧力が $P \simeq 14$bar で最小値をとり，それ以上の P では急激に増大して固化圧力 ($\simeq$ 25bar) に近づくと，ε_b はロトンのエネルギー Δ に近づくことが知られた。この理由は必ずしも理解されていないが，上記の解析は一応もっともらしく思える。

実験ではさらに，$\nu_0(E)$ の電場 E に対する依存性も測定された。渦生成はイオンの速度 u に依存するが，その形を臨界速度 u_c を越したとき一定の確率 $\widetilde{\nu}$ で起きると仮定して，$\nu(u) = \widetilde{\nu}\theta(u - u_c)$ とおく (θ は階段関数)。さらに以前から実験的に知られていたロトン対の自発放出についての事実[29]に注目する。圧力が高くなるとロトンのエネルギー Δ が減少し，ロトンの自発放出の臨界速度 $u_R = \Delta/p_0$ (6–1 節，Landau の臨界速度の項参照) が減少することにより，渦糸生成の臨界速度より小さな速度でロトン対の放出が実現するようになる。このときイオンの速度分布 $f(u, E)$ は E とこの放出過程を考慮した Boltzmann 方程式の解として与えられる[30]。これを用いてトンネル過程による渦生成の確率は

$$\nu_0(E) = \int_0^\infty du f(u,E)\nu(u) \sim \exp\left[-\frac{\alpha m^*(u_c - u_R)^3}{3eE}\right] \qquad (6.47)$$

と与えられる。ここで α はロトン対の放出を決める係数，m^* はイオンの有効質量である。実験的な測定事実，$\nu_0(E)$ が E とともに増大し，また P とともに減少することと，(6.47) は定性的に符合している。

以上見てきたように，超流体中を運動するイオンは臨界速度 $u_c = 50 \sim 60$m/s に達すると，始めに半径 $R \sim 5$Å 程度の渦糸のループがイオン球面上に核生成される。その際のエネルギー障壁は $\varepsilon_b/k_B = 2 \sim 3$K という微小なもので，$T < T_0 \simeq 0.3$K では量子力学的トンネル過程により，$T > T_0$ では熱活性化過程により実現されていることは確からしい。しかし問題点も残されている。一つは圧力依存性である。もともと高い圧力での実験の目的は，イオンがいきなり大きな渦環を生成するのを押え，また上述のロトンの自発放出を実現させるためであったが，なぜ ε_b が圧力により変化するのか，また圧力が高いときにロトンの対放出が高確率で起きるのかについては，解明されていない。圧力が高くなれば電子のまわりに形成される空孔の自由表面のヘリウムが圧縮され，イオンの運動とヘリウム原子との相互作用が強くなることは想像できるが，それがロトン放出や渦糸ループの核生成にどのようにかかわるかは今後解明すべき問題であろう。さら

に^{3}He が不純物としてわずかに存在するとき，渦生成が飛躍的に増大する実験的事実[31)]の議論[32)]も興味ある問題である。

最後に，量子的トンネル効果により，実際に渦糸が生成される確率をどのように評価するかの問題がある。これも古くから研究されてはいるが定量的な評価はかなり困難な問題である。C.M.Muirhead ら[23)] は超流動の流れがある二次元的な膜上に，有限の質量 (芯に伴う) を持つ微小な長さの渦糸を想定し，その古典的運動から量子力学を構成して，トンネル効果による渦糸生成の確率を評価した。そしてこれをイオンの表面に生成される渦糸のループの問題に翻訳適用してその生成確率の計算を実行した。その詳細は省略するが，これは巨視的量子トンネル (macroscopic quantum tunneling) 現象[28)]の一つの例題であり，実験条件に即した精細な議論が要求される問題であろう。

7. 渦糸分布と流体力学

この章では発生した渦糸がとる典型的な 2 つの分布の状態をとりあげ，これらの状態で渦糸がどのような運動に従うか，そして二流体の力学にどんな影響を及ぼすかを議論する。ヘリウムの入った円筒容器を中心軸のまわりに回転させたとき，ある回転速度に達すると最初に 1 本の渦糸が発生し中心軸の位置に落ち着き，速度が増すに従い次々と渦糸が進入して同じ向きに揃って一様に分布する。そしてこれらが容器と同じ角速度で剛体的に回転する。一方パイプの中に流れを駆動すると，やはり臨界速度を越したところで渦糸が現れるが，この場合は複雑に絡み合った曲線状の渦糸 (これを以下では渦糸タングルとよぶ) となり，超流動乱流あるいは渦糸乱流と称せられる状態が実現する。この 2 つの状態では，平均的な渦糸の運動はもちろん異なるが，渦糸の局所的な部分に注目する限り，共通の運動法則にしたがっていると考えてよい。二流体の流れに置かれた渦糸の運動は，渦糸が量子化された一定の循環 κ を持つことを別にして，古典的な法則に従うものと仮定されるが，液体ヘリウムに固有な側面もあり，やや詳しく議論することにする。これらの分野も多くの実験的な研究[1)]が続いているが，ここでは興味のある代表例のみをとりあげる。

7–1 回転円筒ヘリウムの渦糸

臨界回転速度 液体ヘリウムが半径 R の円筒に満たされており，$T < T_\lambda$ で円筒を中心軸のまわりに一定の角速度 Ω で回転したときの状況を考える。十分緩やかな回転であれば，常流体のみが容器の壁といっしょに回転

し，超流体は，それが渦なしの条件を満たす限り回転流には参加しないで静止しているであろう†。しかし角速度が増してある臨界値 Ω_{c1} に達すると，渦糸が発生してそのまわりに渦流ができた状態のほうがエネルギー的に安定になる。この臨界角速度 Ω_{c1} は次のように評価できる。角速度 Ω で回転している系から見た自由エネルギー F'は，5–1 節で見たように，角運動量を $\boldsymbol{L}$ として $F' = F - \boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{L}$ となる。平衡状態は F' が最小となるときに実現する。簡単のため十分低温のときに話しを限定してエントロピー項が無視できるとしよう。このときには自由エネルギーの代わりにエネルギー E'

$$E' = E - \boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{L} \tag{7.1}$$

の最低条件を調べればよい††。直線状の 1 本の渦糸が発生して回転の中心軸に位置したとすれば (このとき L が最大となる)，単位長さ当たりのエネルギーに注目して，E としては (3.49) の ε をとればよい。角運動量は，$\int_0^R \rho_s r v_s 2\pi r dr = \rho_s \kappa R^2/2$ と与えられる (ここで (3.47) を用いた)。したがって $E' = 0$ から臨界角速度は

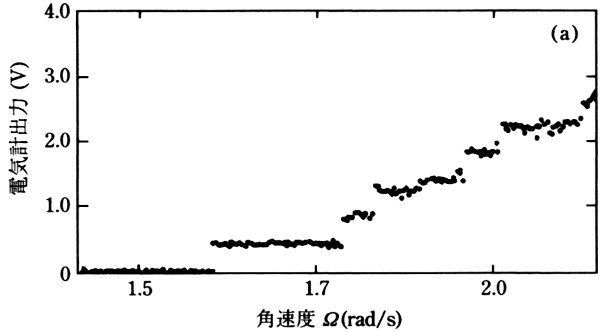
$$\Omega_{c1} = \frac{\kappa}{2\pi R^2}\log\frac{R}{a} \tag{7.2}$$

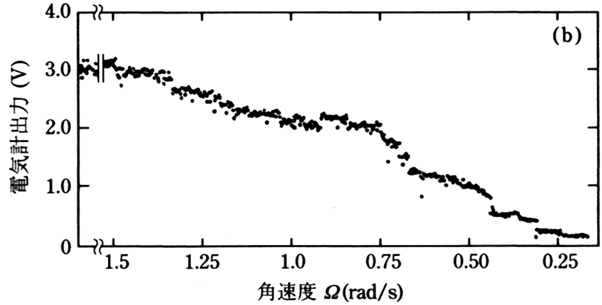
となり，$\Omega > \Omega_{c1}$ では渦糸のある状態がエネルギー的に低くなる。もし $R \sim 1\mathrm{cm}$ の容器を考えれば，$\Omega_{c1} \sim 10^{-3}$ rad/s ときわめて小さな値になる。これは回転により渦糸が容易に発生すること，逆に渦糸のない回転状態をつくることが大変困難なことを示している。

上記の理論的推測を最初に確かめたのは G.B.Hess と W.M.Fairbanck[3] である。$T > T_\lambda$では流体全体が剛体的に回転する。その回転を維持して T_λ 以下に冷やしたときの流体の角運動量の変化を測定して，超流動の回転運動への寄与を調べた。そして予想通りある角速度までは，超流動は渦なしで超流体の角運動量はゼロであることを確認した。ただ臨界角速度の大きさは，用いた容器の寸法を当てはめて得られる (7.2) の値とは必ずしも一致しなかった。R.E.Packard と T.M.Sanders[4] は Ω の増大にしたがって，渦糸が 1 本，2 本と順次進入する様子を直接測定した。容器の底から放射線

† 5 章で議論したトーラス容器での非古典的回転流の場合で，$\omega \ll \omega_c$ のときの事情に対応している。この章では容器の角速度を Ω で表し，ω は渦度に用いる。

†† (7.1) は例えば Landau，Lifshitz[2] に示されている。先の (5.1) では $E'(p', r')$ の変数を実験室系の変数で表したもので，少し事情が異なる。





7·1 図　容器の回転角速度Ωと計測電気計の電圧。
(a)　容器を加速するとき，侵入する渦糸 (に捕獲される電子数) が段階的に増加。(b)　減速するときは，ほぼ連続的に減少。

源を用いて電子を注入すると，渦糸は一定の割合で電子を捕獲する。渦糸の方向に電場をかけると，流体の自由表面で渦糸に捕獲されていた電荷が放出され，それを計数管で測定する。その階段的な変化の様子から，1 本ごとの渦糸の進入を判別した。7·1 図 (a) にそれを示すが，この場合もΩ_{c1}の理論値と実験値の一致は必ずしもよくない。また容器の減速に対しては 7·1 図 (b) に見るように階段的ではなく連続的に減少し，しかもΩ_{c1}より十分小さな回転速度まで渦の影響が見られる。これは渦糸が容器の壁の影響 (ピン止め効果) を受けているか，あるいは生じた渦糸が準安定な状態にあることによると推察されている。

渦糸の一様分布と剛体回転　容器の回転速度が十分大きくなったとき ($\Omega \gg \Omega_{c1}$)，進入した多数の渦糸はどんな配置をとり容器に対しどのような運動をするかを考えよう。Feynman[5)] は多数の渦糸は一様に分布し，そ

れらは全体として容器と同じ角速度 Ω で剛体的な回転をすると考えた。このときには平均の超流動速度は $\boldsymbol{v}_{\rm s} = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}$, したがって円筒の断面にわたって分布する渦糸の面密度を n_v とすれば,

$$\kappa n_v \hat{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{\omega} = \nabla \times \boldsymbol{v}_{\rm s} = 2\boldsymbol{\Omega} \quad \text{あるいは} \quad n_v = \frac{2\Omega}{\kappa} \tag{7.3}$$

の関係が成立する。ここで回転軸を z 軸にとり, $\hat{\boldsymbol{z}}$ はその方向の単位ベクトル, $\boldsymbol{r}$ は z 軸から計った二次元の位置ベクトルである。Feynman の推測が正しいことは次のような考察から確かめられる。z 軸に平行に揃った渦糸があるとき, その方向には並進対称であるので, ある z の位置でそれに垂直な平面内での速度場 $\boldsymbol{v}_{\rm s}(\boldsymbol{r})$ を考える。位置 $\boldsymbol{r}_i$ にある渦糸からの寄与† を次のように連続体近似で表す。

$$\boldsymbol{v}_{\rm s}(\boldsymbol{r}) = \frac{\kappa}{2\pi}\sum_i \frac{\hat{\boldsymbol{z}} \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i|^2} = \frac{\kappa}{2\pi}\hat{\boldsymbol{z}} \times \int d\boldsymbol{r}' n_v(\boldsymbol{r}')\frac{(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^2}$$

ここで渦糸の面密度 $n_v(\boldsymbol{r}')$ が一様であれば定数として積分は実行できて

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_{\rm s}(\boldsymbol{r}) &= \frac{n_v \kappa}{2\pi}\hat{\boldsymbol{z}} \times \frac{\boldsymbol{r}}{r}\int_0^R r' dr' \int_0^{2\pi} d\theta \frac{r - r'\cos\theta}{r^2 - 2rr'\cos\theta + r'^2} \\ &= n_v \kappa\, \hat{\boldsymbol{z}} \times \frac{\boldsymbol{r}}{r^2}\int_0^r r' dr' \\ &= \Omega_v \hat{\boldsymbol{z}} \times \boldsymbol{r}, \qquad\qquad \Omega_v = \frac{n_v \kappa}{2} \end{aligned} \tag{7.4}$$

となる。このように各渦糸はそのまわりに渦流をともないながら, 一定の密度を保ち全体として角速度 Ω_v の剛体的な超流動の流れをつくる。ところでこの Ω_v が容器の角速度 Ω に等しいことは, (7.1) で与えた回転系でのエネルギー最小の条件から確かめられる。E として超流体の運動エネルギーをとれば, (7.4) を用いて

$$\begin{aligned} E' &= \int d\boldsymbol{r}\left[\frac{1}{2}\rho_{\rm s} v_{\rm s}^2 - \boldsymbol{\Omega}\cdot(\boldsymbol{r} \times \rho_{\rm s}\boldsymbol{v}_{\rm s})\right] \\ &= I\Omega_v\left(\frac{1}{2}\Omega_v - \Omega\right) \end{aligned} \tag{7.5}$$

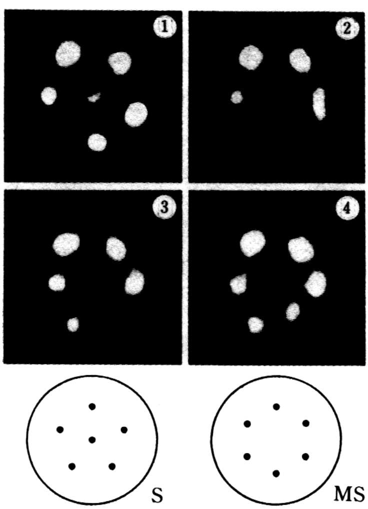
となる。ここで $I = \pi\rho_{\rm s}R^4/2$ は慣性モーメントである。したがって E' は Ω_v が $\Omega_v = \Omega$ のときに最小となる。粘性を持つ常流体は容器の Ω で回転するので, 結果的に流体全体が Ω で剛体的に回転することになり, これは

† これは直線電流 (渦糸に対応) がつくる磁場 (速度場に対応) に対する Biot-Savart の法則に相当している。

後述の相互摩擦力の効果とも符合する。もちろん実験的にも確認されており，古典流体に似て流体の自由表面は回転放物面 (meniscus) をつくる。

典型的な実験での回転として $\Omega \simeq 1$ rad/sec をとれば，$n_v = 2\Omega/\kappa \simeq 2000/\mathrm{cm}^2$ の渦糸が一様に分布することになる。これまでは連続体近似による考察である。微視的に見ればこれらの渦糸は二次元面内で三角格子状の配置をとる。これは理論的[6] に予想できることで，同じ向きの渦糸の間には互いに斥力が働くことにより，最低エネルギーの配置が三角格子となることは二次元結晶と同じである。そのとき渦糸の平均間隔は $(\kappa/\sqrt{3}\Omega)^{1/2}$ である。また，実際には容器の側壁を考慮すると，壁から渦糸 1 本 (ないし 2 本) 分に相当する内側には，渦糸のない領域が存在することも指摘されている。

何本かの渦糸が容器の中に進入したとき，どんな配置をしているかを直接写真あるいは映像化した実験も行われた。E.J.Yarmchuck と R.E.Packard[7] は前述の実験と同じように渦糸に捕獲された電子を電場により流体の表面まで引き出し，それを燐を塗付したスクリーンに照射してそのスポットか



7·2 図　回転容器中に発生した渦糸の配置。
写真 1～4 は 13 秒毎にとられた 30 枚のフィルムの重ね合わせで構成されたもの。安定 (S) な配置と準安定 (MS) な配置が見られる。

ら渦糸の配置を可視化した。7·2 図は 6 本の渦糸の配置を示した 4 枚の写真であるが，これらは図の下に示される 2 つのパターン，安定 (S) な配置のものと準安定 (MS) なものに対応している。安定な配置は理論的に予想されるものだが，渦糸間の間隔は予言値より平均で 10% 程度小さい。この原因は準安定な配置が現れることとも関連するが，やはり渦糸が容器の底や側壁にピン止めされていること，あるいは渦糸の振動の影響が考えられている。

渦糸による相互摩擦力　超流体の中に渦糸が生ずると，常流体を構成している励起量子がこれと相互作用して渦糸に力を及ぼし，それを媒介として結果的に超流体に力が働く。反作用として常流体は逆の力を受ける。これが相互摩擦力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{sn}}$で，最初 C.J.Gorter と J.H.Mellink[8]により現象論的に導入された。その後 H.E.Hall と W.F.Vinen[9] により再検討され，そして I.L.Bekarevich と I.M.Khalatnikov[10] により，$\boldsymbol{F}_{\mathrm{sn}}$を含む拡張された二流体力学として確立された。代表的な表式として超流動速度の運動方程式[10]を書くと†，

$$\rho_{\mathrm{s}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}}{\partial t}+\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}\cdot\nabla\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}+\nabla\mu\right)=-\rho_{\mathrm{s}}\beta\,\boldsymbol{\omega}\times(\nabla\times\widehat{\boldsymbol{\omega}})+\boldsymbol{F}_{\mathrm{sn}} \tag{7.6}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_{\mathrm{sn}}=-\frac{\rho_{\mathrm{s}}\rho_{\mathrm{n}}}{2\rho}\big(B\,\boldsymbol{\omega}\times[\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{v}_{\mathrm{n}}-\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}-\beta\nabla\times\widehat{\boldsymbol{\omega}})]\\ +B'\,\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{v}_{\mathrm{n}}-\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}-\beta\nabla\times\widehat{\boldsymbol{\omega}})\big)\end{aligned} \tag{7.7}$$

$$\beta=\frac{\varepsilon}{\rho_{\mathrm{s}}\kappa}=\frac{\kappa}{4\pi}\log\frac{b}{a},\qquad\widehat{\boldsymbol{\omega}}=\frac{\boldsymbol{\omega}}{|\boldsymbol{\omega}|} \tag{7.8}$$

ここで β の定義にある ε は渦糸の単位長さ当たりのエネルギー (3.49) であるが，log の中の R は今は渦糸の平均間隔 b に置き換えられている。$\boldsymbol{v}_{\mathrm{n}},\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}$ は 5 章で扱った流体力学的速度場であり，同じように渦度 $\boldsymbol{\omega}(r)$ も個々の渦糸の渦度ではなく，b より十分大きい領域にわたり粗視平均 (coarse grained average) したものである。上式は少し複雑であるが，物理的意味は明瞭である。まず $\beta\nabla\times\widehat{\boldsymbol{\omega}}$ は渦糸 (群) が有限な曲率を持つことからくる自己誘導速度 (次節の (7.12) を参照) である。(7.6) 右辺の第 1 項はこれと関連して，曲がった渦糸を直線に戻そうとする単位体積当たりの張力である。1 本の渦糸の単位長さ当たりの張力 $\boldsymbol{f}_T$ は，ε と曲率半径 R により，

† 相互摩擦力についての詳しい議論は次節で述べる。

$$\boldsymbol{f}_T = \frac{\varepsilon}{R}\,\widehat{\boldsymbol{\omega}} = \varepsilon\,(\widehat{\boldsymbol{\omega}}\cdot\nabla)\widehat{\boldsymbol{\omega}} = -\varepsilon\,\widehat{\boldsymbol{\omega}}\times(\nabla\times\widehat{\boldsymbol{\omega}}) \tag{7.9}$$

と与えられる。これに渦糸の密度 ω/κ を掛け，(7.8) を参照すれば (7.6) 右辺の第 1 項となることがわかる。この β は運動粘性率 (kinematic viscosity) の次元を持つ量であるが，この第 1 項は散逸項ではない。にもかかわらず速度の 2 次微係数を含むために，状況によっては超流動に対して有効的な粘性の働きをすることが知られている[11]。

(7.7) の $\boldsymbol{F}_{\mathrm{sn}}$ は相互摩擦を表す現象論的な係数 (無次元)B, B' を含むが，前者は流れの相対速度の方向に，後者はそれと $\boldsymbol{\omega}$ の双方に垂直に働く力の大きさを表している。一般には $\boldsymbol{\omega}$ の方向にも働く第 3 番目の項も考えられるが，その値は小さく無視できるので省略した。もともと超流動は粘性を伴わない流れであったが，渦糸の出現を通して相互摩擦による散逸が起きることになる。ただ先に考えた定常的な回転ヘリウムでの流体全体の剛体的な回転では，回転座標系での熱平衡が成立している。つまり散逸が起きないように，$\boldsymbol{F}_{\mathrm{sn}} = 0$ となっている。実際このときには $\boldsymbol{v}_{\mathrm{n}} = \boldsymbol{v}_{\mathrm{s}} = \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}$，そして $\boldsymbol{\omega} = 2\boldsymbol{\Omega}$ が成立し剛体回転が結論される。ところで $\boldsymbol{F}_{\mathrm{sn}}$ の存在を検証する実験として，回転ヘリウムの中を伝播する第二音波の測定がある。(7.6)，(7.7) において，自己誘導速度は無視し，$\boldsymbol{\omega} = 2\boldsymbol{\Omega}$ とおく近似をとる。さらに $\boldsymbol{v}_{\mathrm{n}} - \boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}$ が第二音波の速度場であるとして，線形化された流体力学方程式を考える。それによると第二音波が $\boldsymbol{\omega}$ に垂直に進行するときには，渦糸がないときに比べて，第二音波の振動数のずれ $\Delta\nu$ と吸収係数 α が，

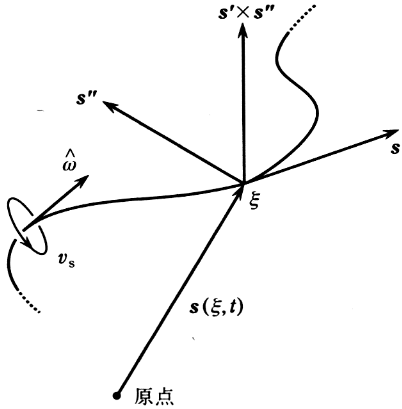
$$\Delta\nu = (2 - B')\Omega/2\pi, \qquad \alpha = B\Omega/2c_2$$

により表されることが結論された。そして実験から相互摩擦の係数 B, B' の値，その温度依存性が決められている。

回転ヘリウムの渦糸に関しては，多くの興味ある実験および理論的研究[1]，例えば渦糸の振動にかかわる問題があるが，ここでは省略する。

7–2　渦糸の運動

前節では回転する円筒容器の中で，ほとんど同じ方向に揃った渦糸の集団を考察し，渦糸が媒介となり二流体の間に摩擦力が生じることを見た。一方，次節で述べるように，パイプの中に駆動された定常流には，その速さに応じた渦糸タングルが生じ，この場合にも相互摩擦力が現れる。この節では渦糸の運動をどのように記述するかの議論から始めて，渦糸タング



7·3 図　渦糸曲線の表示。曲線の長さ ξ をパラメーターとして時刻 t の渦糸の位置 $\boldsymbol{s}(\xi,t)$ を表す。$\boldsymbol{s}', \boldsymbol{s}'', \boldsymbol{s}' \times \boldsymbol{s}''$は渦糸の各点で互いに直交している。

ルの運動と二流体力学の拡張について述べる。

渦糸の表示と自己誘導速度　　渦糸の芯は 10^{-10}m といった微視的サイズであるから，それを曲線とみなし微分幾何に習ってその性質を表現するのが便利である (7·3 図)。時刻 t の渦糸の位置ベクトルを $\boldsymbol{s}(\xi,t)$ と書く。ξ は曲線に沿って測られる長さ (arc length) である。$\partial\boldsymbol{s}/\partial\xi \equiv \boldsymbol{s}'(\xi,t)$ は接線方向 (渦糸の渦度の方向 $\hat{\boldsymbol{\omega}}$) の単位ベクトルである。$\partial^2\boldsymbol{s}/\partial\xi^2 \equiv \boldsymbol{s}''(\xi,t)$ は $\boldsymbol{s}'(\xi,t)$ に垂直なベクトルでその大きさは曲率半径 R の逆数，$|\boldsymbol{s}''(\xi,t)| = R^{-1}$ である。このとき渦糸による渦度 $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{r},t)$ とそれによる超流動速度 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r},t)$ は

$$\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{r},t) = \nabla \times \boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r},t) = \kappa \int d\xi\ \boldsymbol{s}'(\xi,t)\ \delta\left(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{s}(\xi,t)\right) \qquad (7.10)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r},t) &= \frac{1}{4\pi}\int d\boldsymbol{r}'\ \frac{\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{r}',t) \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} + \boldsymbol{v}_{\mathrm{sa}}(\boldsymbol{r},t) \\ &= \frac{\kappa}{4\pi}\int d\xi'\ \frac{\boldsymbol{s}'(\xi',t) \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{s}(\xi',t))}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{s}(\xi',t)|^3} + \boldsymbol{v}_{\mathrm{sa}}(\boldsymbol{r},t) \qquad (7.11) \end{aligned}$$

と与えられる†。ここで $\boldsymbol{v}_{\mathrm{sa}}$ は渦糸の存在とは関係のない十分離れた場所で

† これらの関係は，電磁気学で知られた電流密度 $\boldsymbol{i}$($\boldsymbol{\omega}$ に対応) と磁場 $\boldsymbol{B}$($\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}$ に対応) に対する Ampère および Biot-Savart の法則に対応するが，その類似性には限界がある。例えば同方向の 2 本の電流には引力が働くが，渦糸では斥力である。

の速度場で，外部から駆動する超流動速度場はこれにより表される。

(7.11) で $\boldsymbol{r}$ が渦糸の上の点 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{s}(\xi, t)$ にあるときの $\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{s}(\xi,t),t) \equiv \boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}(\xi,t)$，を求める。これは以下の議論で重要な役割をもつ。その際 (7.11) において ξ' の積分を 2 つの領域に分けて考える。注目する ξ を挟んで $-R < \xi' - \xi < R$ の範囲の積分と，それ以外の部分に分けると，前者は曲率半径 R 以内の渦糸部分が ξ に及ぼすもので，$\xi' \sim \xi$ で大きな寄与がある。その評価は ξ のまわりの展開式，$\boldsymbol{s}(\xi') = \boldsymbol{s}(\xi) + (\xi' - \xi)\boldsymbol{s}'(\xi) + (\xi' - \xi)^2 \boldsymbol{s}''(\xi)/2$ を分母，分子に代入して計算できる。この部分からの $\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}(\xi,t)$ への寄与を $\boldsymbol{v}_{\mathrm{i}}(\xi,t)$ と表すと ($\xi' - \xi$ を改めて ξ' として)，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_{\mathrm{i}}(\xi,t) &= \frac{\kappa}{4\pi} \int_a^R \frac{d\xi'}{\xi'}\, \boldsymbol{s}'(\xi,t) \times \boldsymbol{s}''(\xi,t) \\ &= \beta\, \boldsymbol{s}'(\xi,t) \times \boldsymbol{s}''(\xi,t), \qquad \beta = \frac{\kappa}{4\pi} \log \frac{R}{a} \end{aligned} \tag{7.12}$$

と与えられる。ここで積分下限での発散を避けるため，渦糸の芯のサイズ a でカットした。この β は (7.8) で定義したものと同じであるが，log の中の因子は再び曲率半径 R である。(7.12) の結果は最初 R.J.Arms と F.R.Hamma[12)] により示されたもので，局所誘導近似 (localized induction approximation) と称される。$\boldsymbol{v}_{\mathrm{i}}$ は渦環の速度 (3.50) と同様に，渦糸上の 1 点へ，そのまわりの他の渦糸部分がつくる流れの寄与の結果で，**自己誘導速度**とよばれる。一方，R より離れた渦糸部分からの ξ' の積分は，非局所的寄与 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{nol}}$ を与えるが，これはまわりの渦糸の配置に依存する。結局，渦糸上の速度 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}(\xi,t)$ は

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}(\xi,t) = \boldsymbol{v}_{\mathrm{sa}}(\xi,t) + \boldsymbol{v}_{\mathrm{i}}(\xi,t) + \boldsymbol{v}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{nol}}(\xi,t) \tag{7.13}$$

と表される。しかし ξ の位置に最も近づく渦糸が，ある距離 Δ ((7.51) を参照) より離れている限り，$\boldsymbol{v}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{nol}}$ は $\boldsymbol{v}_{\mathrm{i}}$ に比べて無視できることが示される。

超流動速度と渦糸長の運動　前節の回転ヘリウムでは，渦糸の量を表すのに面密度 $n_v(\boldsymbol{r},t) = \omega/\kappa$ を用いたが，渦糸タングルでは単位体積中にある渦糸の長さ $L(\boldsymbol{r},t)$ を導入する。これは**渦糸長密度**とよばれ，やはり面積の逆の次元をもつ。また渦糸タングルの平均速度，$\boldsymbol{v}_l(\boldsymbol{r},t)$ も重要な役割をする。それらは渦糸のパラメトリック表示を用いて次のような局所量として定義される†。

† ただしここでは $\boldsymbol{s}'(\xi,t)$ の運動を問題とするために，ξ は曲線の長さではなく，t とは独立な任意のパラメーターとする。したがって $\boldsymbol{s}'(\xi,t)$ は単位ベクトルとはならない。

$$L(\boldsymbol{r},t)=\int d\xi\ |\boldsymbol{s}'(\xi,t)|\ \delta\left(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}(\xi,t)\right) \tag{7.14}$$

$$\boldsymbol{v}_l(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{L(\boldsymbol{r},t)}\int d\xi\ |\boldsymbol{s}'(\xi,t)|\ \dot{\boldsymbol{s}}(\xi,t)\ \delta\left(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}(\xi,t)\right) \tag{7.15}$$

ここで $\dot{\boldsymbol{s}}(\xi,t)=\partial\boldsymbol{s}(\xi,t)/\partial t$ は渦糸の速度である。

さて渦糸が存在するときの超流動速度は (7.11) で与えられたが，その運動方程式を求めるためにまず渦度 $\boldsymbol{\omega}$ の運動方程式を導出する。それは (7.10) 右辺の時間微分から計算され，補遺 7 の (5) 式のように与えられる；

$$\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t}=\nabla\times\left(\boldsymbol{v}_l(\boldsymbol{r},t)\times\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{r},t)\right) \tag{7.16}$$

これを積分して

$$\begin{aligned}\frac{\partial\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}}{\partial t}&=\boldsymbol{v}_l\times\boldsymbol{\omega}+\nabla\chi(\boldsymbol{r},t)\\&=\boldsymbol{v}_l\times\boldsymbol{\omega}-\nabla\left(\mu(\boldsymbol{r},t)+\frac{1}{2}\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}^2\right)\end{aligned} \tag{7.17}$$

となる。1 行目の任意スカラー関数 χ は，超流動のエネルギー保存則から決められ 2 行目のように化学ポテンシャルで表される。(7.17) は古くから現象論として用いられてきたが，前節の回転ヘリウムの場合に対しては C.Baym と E.Chandler[13] により始めて導かれた。渦糸タングルの場合にも補遺 7 で示されるように，$\boldsymbol{v}_l$ を (7.15) のように定義すれば一般に成立するものである。また 6 章で議論した位相スリップによる超流動速度の変化 (6.11) も (7.17) の特別な場合とみなされる。(7.17) のより具体的な議論は後述する ((7.27)，(7.29) を参照)。

渦糸長 $L(\boldsymbol{r},t)$ の時間的変化はやはり (7.14) の時間微分をとることから得られ，結果は補遺 7 の (6) 式で与えられる；

$$\frac{\partial L}{\partial t}=-\nabla\cdot\left[L(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{v}_l(\boldsymbol{r},t)\right]+P_L(\boldsymbol{r},t) \tag{7.18}$$

$$P_L(\boldsymbol{r},t)=\int d\xi\ \frac{\partial|\boldsymbol{s}'|}{\partial t}\ \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s})=\int d\xi\ \frac{\boldsymbol{s}'\cdot\dot{\boldsymbol{s}}'}{|\boldsymbol{s}'|}\ \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}) \tag{7.19}$$

(7.18) の右辺第一項は渦糸タングルのフラックスの発散項を表す。P_L は渦糸の長さの伸縮による時間変化率を表している (補遺 7 の (7) 式参照)。P_L のより具体的な議論は後述する ((7.30)，(7.49) を参照)。

渦糸に働く力と速度[1]　(7.17)，(7.18) には渦糸タングルの速度 $\boldsymbol{v}_l(\boldsymbol{r},t)$ が含まれるが，それは渦糸の速度 $\dot{\boldsymbol{s}}$ に依存している。したがって渦糸の運

動方程式の考察が必要になる。渦糸に働く力は 2 種類が考えられる。1 つは Magnus 力 $\boldsymbol{f}_{\mathrm{M}}$ で渦度 $\boldsymbol{\omega} = \kappa \boldsymbol{s}'$ を持つ物体が流体に対して動くときに受ける揚力である。もう 1 つは常流体が及ぼす力 (drag force) $\boldsymbol{f}_{\mathrm{D}}$ で，励起量子が渦糸の芯と衝突することに基因するものである。微視的にはフォノンあるいはロトンがいろいろな角度で渦糸のまわりの渦流の場に入射して散乱される。その際の平均の運動量変化は，平均の常流体速度 v_{n} に対する渦糸の相対速度 $\dot{\boldsymbol{s}} - \boldsymbol{v}_{\mathrm{n}}$ に依存し，これが渦糸に及ぼす力となる。これらは渦糸の単位長さ当たりに働く力として次のように与えられる (以下では再び $\boldsymbol{s}'$を単位ベクトルにとる)；

$$\boldsymbol{f}_{\mathrm{M}} = \rho_{\mathrm{s}} \kappa\, \boldsymbol{s}' \times (\dot{\boldsymbol{s}} - \boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}) \tag{7.20}$$

$$\boldsymbol{f}_{\mathrm{D}} = \gamma_0\, \boldsymbol{s}' \times (\boldsymbol{s}' \times (\dot{\boldsymbol{s}} - \boldsymbol{v}_{\mathrm{n}})) - \gamma_0'\, \boldsymbol{s}' \times (\dot{\boldsymbol{s}} - \boldsymbol{v}_{\mathrm{n}}) \tag{7.21}$$

ここで，$\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}$ は注目している渦糸上での超流動速度 (7.13) であるが，以下では $\boldsymbol{v}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{nol}}$ は $\boldsymbol{v}_{\mathrm{i}}$ に比べて無視できるものとする。また $\boldsymbol{v}_{\mathrm{n}}$ も渦糸上での常流動速度である†。次に運動方程式の慣性項であるが，渦糸の芯は微視的なサイズであるから，それが慣性質量を持つとしてもきわめて小さく無視できよう††。この近似がよいときには，渦糸に働くすべての力の和はつり合ってゼロとなるので，

$$\boldsymbol{f}_{\mathrm{M}} + \boldsymbol{f}_{\mathrm{D}} = 0 \tag{7.22}$$

が成立する。(7.20)，(7.21) を用いて (7.22) を $\dot{\boldsymbol{s}}$ に対して解くと，

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{s}} &= \boldsymbol{v}_{\mathrm{s}} + \alpha \boldsymbol{s}' \times (\boldsymbol{v}_{\mathrm{n}} - \boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}) - \alpha' \boldsymbol{s}' \times \big(\boldsymbol{s}' \times (\boldsymbol{v}_{\mathrm{n}} - \boldsymbol{v}_{\mathrm{s}})\big) \\ &= \boldsymbol{v}_{\mathrm{sa}} + \boldsymbol{v}_{\mathrm{i}} + \alpha \boldsymbol{s}' \times (\boldsymbol{w} - \boldsymbol{v}_{\mathrm{i}}) - \alpha' \boldsymbol{s}' \times \big(\boldsymbol{s}' \times (\boldsymbol{w} - \boldsymbol{v}_{\mathrm{i}})\big)\end{aligned} \tag{7.23}$$

となり，$\dot{\boldsymbol{s}}$ は $\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}$ と $\boldsymbol{v}_{\mathrm{n}}$ により表されることになる。2 行目では $\boldsymbol{v}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{nol}}$ を無視して (7.13) の $\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}} = \boldsymbol{v}_{\mathrm{sa}} + \boldsymbol{v}_{\mathrm{i}}$ を用い，$\boldsymbol{w} \equiv \boldsymbol{v}_{\mathrm{n}} - \boldsymbol{v}_{\mathrm{sa}}$ とした。そして無次元の係数 α, α' は

---

† $\boldsymbol{f}_{\mathrm{D}}$ には渦糸方向の力は働かないとしている。また先に述べた微視的な描像から直接得られる表式と，係数 γ_0, γ_0' を含む (7.21) との関係については文献 1) を参照されたい。

†† 渦糸を半径 a の中空円筒とすると，それが排除した流体の質量を渦糸の質量 m_vとみなせば，単位長さ当たり $m_v = \rho_{\mathrm{s}} \pi a^2$ となる。これは a が微視的サイズであることからきわめて小さく無視できる。ただ前章で述べた，イオンによる渦糸の核生成の量子論では慣性質量を考慮する議論もある[14]。

$$\alpha = \frac{\rho_s \kappa \gamma_0}{\gamma_0^2 + (\rho_s \kappa - \gamma_0')^2}, \qquad \alpha' = \frac{\gamma_0^2 - \gamma_0'(\rho_s \kappa - \gamma_0')}{\gamma_0^2 + (\rho_s \kappa - \gamma_0')^2} \tag{7.24}$$

と与えられる。これは前節で述べた回転ヘリウムの実験で，渦糸による第二音波の吸収の測定から得られた係数 B, B' と

$$\alpha = \frac{\rho_n}{2\rho} B, \qquad \alpha' = \frac{\rho_n}{2\rho} B' \tag{7.25}$$

の関係にあることが示される。したがって α, α' の値や温度依存性 (原理的には理論的に得られるものであるが) は実験的に知ることができ，渦糸乱流の実験の解析にもこれが用いられる。

(7.23) をみると，渦糸はそこを通過する超流動速度 $\boldsymbol{v}_{sa}$ に乗りながら (第1項)，自己誘導速度 (7.12) で動く (第2項)。さらに常流体からの力 (第3, 4項) により複雑な動きを示す。後述する渦糸タングルの運動の数値シミュレーションにはこの式を基礎にとる。

相互摩擦力と渦糸長の変化　(7.23) の $\dot{\boldsymbol{s}}$ を用いて (7.21) の $\boldsymbol{f}_D (= -\boldsymbol{f}_M)$ は改めて，

$$\boldsymbol{f}_D = -\rho_s \kappa \left[\alpha\, \boldsymbol{s}' \times \left(\boldsymbol{s}' \times (\boldsymbol{w} - \boldsymbol{v}_i) \right) + \alpha'\, \boldsymbol{s}' \times (\boldsymbol{w} - \boldsymbol{v}_i) \right] \tag{7.26}$$

と書くことができ，二流体の相対速度 $\boldsymbol{w}$ と自己誘導速度 $\boldsymbol{v}_i$ を含む形で表される。そこで先に求めた (7.17) をより具体的な形に書直す。(7.23)，(7.15)，(7.10) を用い，補遺 7 の (4) 式を参照すれば，

$$\rho_s \boldsymbol{v}_l \times \boldsymbol{\omega} = \rho_s \boldsymbol{v}_s \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{F}_{sn} \tag{7.27}$$

となる。ここで $\boldsymbol{F}_{sn}$ は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_{sn} &= \int d\xi\, \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{s})\, \boldsymbol{f}_D \\ &= -\rho_s \kappa \int d\xi\, \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{s}) \left[\alpha\, \boldsymbol{s}' \times \left(\boldsymbol{s}' \times (\boldsymbol{w} - \boldsymbol{v}_i) \right) + \alpha' \boldsymbol{s}' \times (\boldsymbol{w} - \boldsymbol{v}_i) \right] \end{aligned} \tag{7.28}$$

と与えられ，渦糸タングルの存在するときの局所的な相互摩擦力である。先に述べた回転円筒ヘリウムでの相互摩擦力 (7.7) もこれから導かれる。これは超流体の中に生じた渦糸を媒介として，常流体から超流体に働く力であり，反作用として超流体から常流体に$-\boldsymbol{F}_{sn}$ が働く。結局 $\boldsymbol{v}_s$ の運動方程式 (7.17) は

$$\rho_{\mathrm{s}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}}{\partial t}+\nabla\left(\mu(\boldsymbol{r},t)+\frac{1}{2}\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}^{2}\right)\right)=\rho_{\mathrm{s}}\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}\times\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{F}_{\mathrm{sn}} \tag{7.29}$$

と表される。

同様に渦糸長の時間変化 (7.19) も具体的に表すことができる。(7.23) の ξ による微分をとり，$\boldsymbol{s}'$ とのスカラー積をつくる。これを (7.19) に代入すれば最終的に，

$$P_L=\int d\xi\,\delta\,(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s})\left[\frac{\alpha}{\beta}\,(\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v}_{\mathrm{i}})\cdot\boldsymbol{v}_{\mathrm{i}}-\alpha'\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{s}''\right] \tag{7.30}$$

を得る。ここで (7.12) を用いた。さらに $\boldsymbol{v}_l$ についての (7.15) も (7.23) を代入して具体的な表式に書くことができるが，ここでは省略する。

7–3 渦糸乱流

外部から駆動する超流動速度が臨界速度以上になると渦糸が発生し，十分大きい速度下ではタングル状に発達した乱流状態が実現する。前節では渦糸タングルの存在により二流体の間には新たな相互摩擦力 (7.28) が出現し，それを含む超流動速度の運動方程式 (7.29)，そして渦糸長 L の変化率 P_L に対する (7.30) が導かれた。ここではまず力学的スケーリングに対する不変性をよりどころにして，上の結果がどのようにして実験と比較可能な流体力学的形式に構成されるかの議論をする。さらに渦糸タングルの運動を，直接計算機によって数値的にシミュレートした興味ある結果について概略する。最後に渦糸乱流で測定されている実験結果のいくつかを取り上げ，上述の理論および数値シミュレーションとの比較を行う。

力学的スケーリングと統計平均　古典流体の Navier-Stokes 方程式は，流体の運動を特徴づける代表的な平均速度 V と代表的な長さ D を用いて無次元化すると，Reynolds 数 $Re=DV/\nu$ をパラメーターとして含む形に書くことができる。ここで ν は運動粘性率である。このとき幾何学的に相似な境界をもち，同じ Reynolds 数を与える 2 つの流れは，流体力学的に相似であるといわれる (Reynolds の相似法則)。渦糸乱流においても類似の考えから，K.W.Schwarz[15),16)]，C.E.Swanson と R.J.Donnelly[17)] は渦糸の運動にスケーリング不変性が成り立つとして，渦糸乱流を特徴づける物理量を実験結果と比較できるまでに具体化した。

以下では Schwarz による議論の概要を紹介する。先に求めた渦糸の速度

の式 (7.23) を議論の基礎にとる。(7.12) を用いてそれを表すと,

$$\dot{\boldsymbol{s}} = \boldsymbol{v}_{\mathrm{sa}} + \beta \boldsymbol{s}' \times \boldsymbol{s}'' + \alpha \boldsymbol{s}' \times (\boldsymbol{w} - \beta \boldsymbol{s}' \times \boldsymbol{s}'') - \alpha' \boldsymbol{s}' \times \left[\boldsymbol{s}' \times (\boldsymbol{w} - \beta \boldsymbol{s}' \times \boldsymbol{s}'')\right] \tag{7.31}$$

$$\beta = \frac{\kappa}{4\pi} \log(c/a\overline{|\boldsymbol{s}''|}) \tag{7.32}$$

となる。(7.32) の log に含まれる因子は, 平均の曲率半径で置き換えられた (c は 1 の程度の数)。力学的スケーリングを実行するために, まず β を時間と速度に吸収させて換算された変数

$$t_0 = \beta t, \quad \boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{v}/\beta \tag{7.33}$$

を導入すれば ($\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{v}_{\mathrm{sa}}$, $\boldsymbol{w}$ を代表している), (7.31) は

$$\frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial t_0} = \boldsymbol{v}_{\mathrm{sa},0} + \boldsymbol{s}' \times \boldsymbol{s}'' + \alpha\, \boldsymbol{s}' \times (\boldsymbol{w}_0 - \boldsymbol{s}' \times \boldsymbol{s}'') - \alpha' \boldsymbol{s}' \times \left[\boldsymbol{s}' \times (\boldsymbol{w}_0 - \boldsymbol{s}' \times \boldsymbol{s}'')\right] \tag{7.34}$$

となる。この式は, あるスケール因子 λ を考え, 空間的な長さをλ 倍し, 同時に時間をλ^2 倍, 速度をλ^{-1} 倍するときには不変である†。ある流れの状態が, 大きさ D^* の幾何学的な系において換算時刻 t_0^* に換算流速が $\boldsymbol{v}_0^*$ であるとするとき, この流れでの渦糸タングルの配置を, $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}^*(\xi^*, t_0^*)$ と表せば, $D = \lambda D^*$, $t_0 = \lambda^2 t_0^*$, $v_0 = v_0^*/\lambda$ での流れの状態における渦糸タングルの配置は, スケール不変性から

$$\boldsymbol{s}(\xi, t_0) = \boldsymbol{s}(\lambda\xi^*, \lambda^2 t_0^*) = \lambda\, \boldsymbol{s}^*(\xi^*, t_0^*) \tag{7.35}$$

という解で表される。これが力学的スケーリングによる相似性である。渦糸にかかわるいくつかの物理量を代表して $P(\boldsymbol{r}, t_0, v_0, D, \cdots)$ と書けば, 同様なスケーリング変換により,

$$\begin{aligned} P(\boldsymbol{r}, t_0, v_0, D, \cdots) &= P(\lambda \boldsymbol{r}^*, \lambda^2 t_0^*, v_0^*/\lambda, \lambda D^*, \cdots) \\ &= f(\lambda)\, P^*(\boldsymbol{r}^*, t_0^*, v_0^*, D^*, \cdots) \end{aligned} \tag{7.36}$$

の関係が得られる。ここで $f(\lambda)$ は P の形に依存して決まる量である††。λ は 2 つの相似な流れにおける量の比として, 例えば $\lambda = D/D^* = v_0^*/v_0 = (t_0/t_0^*)^{1/2}$ のいずれにもとれる。以下では P として, 前節で議論した渦糸

† β に含まれる log の因子にも長さ R, a があるが, 渦糸の芯のサイズ a はスケールされることはない量であり, ここの R はスケール変換を受けないものと近似する。

†† P が依存するパラメーターは上に示されたものの他にも, 例えば流体の容器の形, 壁の性質などがあるが, 以下では考えない。

タングルの運動を特徴づけるいくつかの量を考察をする。

始めに渦糸長密度 (7.14) を考える。ここでは定常状態を考え，系の中に選んだ体積 Ω での統計平均値，

$$L = \frac{1}{\Omega}\int d\boldsymbol{r} L(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\Omega}\int d\xi \tag{7.37}$$

に注目する。そして L の速度依存性に対しては，相対速度 $\boldsymbol{w}$ のみによると仮定する。このとき (7.37) から $f(\lambda) = \lambda^{-2}$ となり，

$$L(\boldsymbol{r}, D, \boldsymbol{w}_0) = \lambda^{-2}\, L^*(\boldsymbol{r}^*, D^*, \boldsymbol{w}_0^*) \tag{7.38}$$

の関係を得る。以下では渦糸タングルの分布が一様 (homogeneous) な場合に限る。このときには，平均の L は流体の場所や容器の大きさ (例えばチャネルの断面のサイズ) には依存せず，流速 $\boldsymbol{w}_0$ のみによるとしてよい。したがって

$$\lambda^2 = \frac{L^*}{L} = \left(\frac{w_0^*}{w_0}\right)^2 \tag{7.39}$$

が結論される。これは L と $w(= \beta w_0)$ の間の関係

$$L = c_L^2 \frac{w^2}{\beta^2}, \qquad c_L^2 = L^* \left(\frac{\beta^*}{w^*}\right)^2 \tag{7.40}$$

として表される。

ところで十分発達した乱流状態では，渦糸タングルの分布が一様になることは期待できるが，等方的であるとは限らない。特定の方向に速度場 $\boldsymbol{w}$ が存在するときには，むしろ分布に異方性があると考えるのが自然である。この異方性を表す測度に，次のような 3 つの無次元数を導入するのが有効である。それらは $\boldsymbol{w}$ の方向，およびそれに垂直方向の単位ベクトルを $\widehat{\boldsymbol{w}}_{/\!/}, \widehat{\boldsymbol{w}}_{\perp}$ として

$$I_{/\!/} = \frac{1}{\Omega L}\int d\xi\, [1 - (\boldsymbol{s}' \cdot \widehat{\boldsymbol{w}}_{/\!/})^2] \tag{7.41}$$

$$I_{\perp} = \frac{1}{\Omega L}\int d\xi\, [1 - (\boldsymbol{s}' \cdot \widehat{\boldsymbol{w}}_{\perp})^2] \tag{7.42}$$

$$I_l \widehat{\boldsymbol{w}}_{/\!/} = \frac{1}{\Omega L^{3/2}}\int d\xi\, (\boldsymbol{s}' \times \boldsymbol{s}'') \tag{7.43}$$

と定義される。ただし渦糸の分布は $\widehat{\boldsymbol{w}}_{/\!/}$ の方向の軸のまわりに軸対称としている。始めの 2 つは $\boldsymbol{w}$ に対する渦糸の向き (渦度) の，(7.43) は換算自己誘導速度 (7.12) の異方性の平均測度を表す。また $I_{/\!/}/2 + I_{\perp} = 1$ の関係が一般に成立していることが対称性から示される。等方的な分布では

$I_{/\!/} = I_{\perp} = 2/3,\ I_l = 0$ である。さらに渦糸の曲率半径の逆数の統計平均，そして β で換算した自己誘導速度の大きさの統計平均は次のように定義される；

$$\overline{|s''|} = \frac{1}{\Omega L}\int d\xi |s''| = c_1 L^{1/2} \tag{7.44}$$

$$\overline{|s''|}^2 = \frac{1}{\Omega L}\int d\xi |s' \times s''|^2 = \frac{1}{\Omega L}\int d\xi |s''|^2 = c_2^2 L \tag{7.45}$$

ここで c_1, c_2 はスケーリングの比例定数であるが，その具体的な形は省略する。渦糸の平均間隔の目安は $L^{-1/2}$ で表される。

さて渦糸タングルの存在による相互摩擦力 (7.28) の体積 Ω での統計平均を考える。それは

$$\boldsymbol{F}_{\rm sn} = -\frac{\rho_{\rm s}\kappa\alpha}{\Omega}\int d\xi\, \boldsymbol{s}' \times \left[\boldsymbol{s}' \times (\boldsymbol{w} - \beta \boldsymbol{s}' \times \boldsymbol{s}'')\right] \tag{7.46}$$

と書かれる。ここで α' を含む項がないのは対称性からゼロとなるからである。(7.46) は上に定義した異方性の係数を用いて

$$F_{\rm sn} = \rho_{\rm s}\kappa\alpha\,[I_{/\!/} L w - I_l \beta L^{3/2}] \tag{7.47a}$$

$$= \rho_{\rm s}\kappa\alpha\,[I_{/\!/} - c_L I_l] L w \tag{7.47b}$$

$$= \rho_{\rm s}\kappa\alpha c_L^2\,[I_{/\!/} - c_L I_l] w^3/\beta^2 \tag{7.47c}$$

となる。(7.47b)，(7.47c) は (7.40) を用いた。これらの式は，以前から実験結果の解析に対して現象論的に用いられてきた表式 (そこでは等方性を仮定しているが) と L, w の依存性において一致する。ここでは力学的スケーリングの観点から，これらの表式を異方性を考慮した形に一般化して再現したものということができる。

次に渦糸長の時間変化を表す (7.30) も同様に議論できる。それは

$$P_L = \frac{\alpha}{\Omega}\int d\xi \left[\boldsymbol{w}\cdot(\boldsymbol{s}' \times \boldsymbol{s}'') - \beta |\boldsymbol{s}' \times \boldsymbol{s}''|^2\right] \tag{7.48}$$

と表される。ここでも α' を含む項は対称性から消える。これは先の一様分布の仮定から，(7.43)，(7.45) を用いて

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \alpha\left[I_l L^{3/2} w - \beta\, c_2^2 L^2\right] \tag{7.49}$$

となる。この表式は，W.F.Vinen[18)] が古典流体での議論を参考にして，渦

糸の成長項 (第 1 項) と減衰項 (第 2 項) を次元解析的に導出したものと L, w の依存性において一致している。しかし Vinen が準拠したものと，Schwarz のそれとは異なる。Vinen の式は，定常状態で $L^{1/2}$ と w が比例関係にあり，それが実験の解析に用いられてきた。ここの議論では，その関係は (7.40) で与えられ，後述するように実験との比較において，より合理的であることがわかる。(7.49) に対する定常状態の条件は，スケーリングの係数の間に，$c_L = I_l/c_2^2$ の関係があることを要請している。

最後に力学的スケーリングの手法から臨界速度 v_c について導かれる結果にふれておく。速度に対するスケール因子は，$f(\lambda) = \lambda^{-1}$ であるが，λ をチャネルの断面の大きさ D を用いて $\lambda = D/D^*$ ととる。これは臨界速度が D 以外の他の性質 (例えば，チャネルの長さや形，壁の性質など) にはよらないものと仮定している。このときには

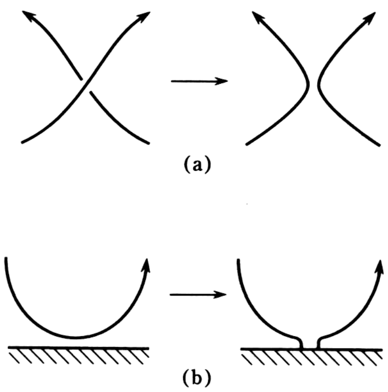
$$v_{\mathrm{c},0} = (D^*/D)\, v_{\mathrm{c},0}^*$$

の関係が成立するので，もとの単位に戻せば

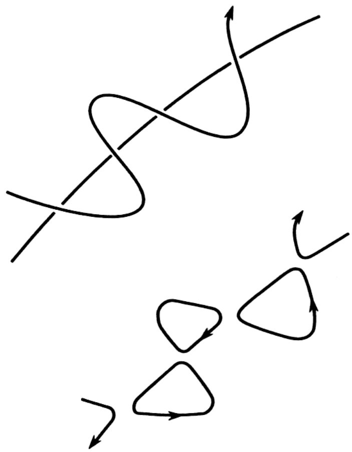
$$v_\mathrm{c} = c_v \frac{\kappa}{4\pi D} \log\left(c' D/a\right), \qquad c_v = D^* v_\mathrm{c}^*/\beta^* \tag{7.50}$$

となる。ただし β の表式 (7.32) の中にある曲率半径の平均値としては，c' を 1 より小さい数因子として $c'D$ に置き換えた。もちろん比例係数 c_v を具体的に与えなければ実際の臨界速度を導いたことにはならないが，スケーリングの議論からは臨界速度が Feynman 型 (6–1 節を参照) の D 依存性を示すことが結論されたといってよい。

数値シミュレーション　Schwarz[15),19)] は渦糸タングルの運動を計算機により直接数値的に追跡して，その乱流状態の様子を調べ，実験結果とよい一致が得られることを示した。基礎にとる式は渦糸の速度を表す (7.31) である。この式は $\boldsymbol{s}$ に対する高次の非線形偏微分方程式で，渦糸の運動は極めて複雑な時間発展を示すことは容易に想像できる。その時間発展の過程で，渦糸と渦糸が互いに接近し交差することがひんぱんに起きる。その場合には (7.31) で無視されてきた非局所的な誘導速度場 ((7.13) の $\boldsymbol{v}_\mathrm{i}^\mathrm{nol}$) が渦糸相互の運動に強い影響を及ぼすことになる。この影響が現れる渦糸間の距離を Δ とするとき，その大きさの目安は次のように見積もられる。非局所的な寄与を近似的に $\boldsymbol{v}_\mathrm{i}^\mathrm{nol} \simeq \kappa/2\pi\Delta$ ととり，これが局所的な自己誘導速度 $\boldsymbol{v}_\mathrm{i} = \beta/R$ と同程度になるときは，$v_\mathrm{i}/v_\mathrm{i}^\mathrm{nol} \simeq (\Delta/2R)\log(R/a) \simeq 1$ と書ける。このとき Δ は



7·4 図　(a) 2 本の渦糸の交差–再結合。
(b) 渦糸の境界での分離。



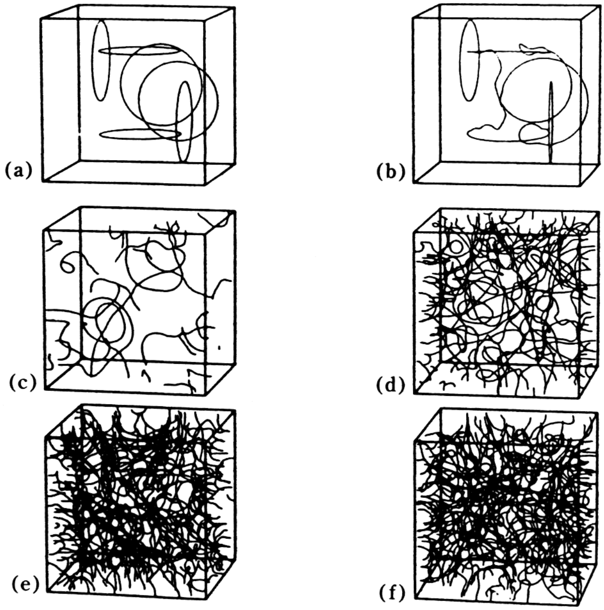
7·5 図　2 本の渦糸の交差–再結合により，小さな 5 つの渦糸要素が生成される。

$$\Delta \simeq 2R/\log(R/a) \tag{7.51}$$

と与えられる。2 本の渦糸が距離 Δ 以内に接近するときの運動を，非局所的な効果を取り入れて数値的に調べた結果，渦糸は相互に強く変形しながら 1 点で交差し，ほとんど瞬間的につなぎ換え (再結合) が起きることが示された (7·4 図 (a))。また渦糸が容器の境界に近づくときにも，鏡像場の影響により同様な事情が見られることも確かめられた (7·4 図 (b))。これらの事実を考慮して Schwarz は，巨視的系での渦糸タングルの時間発展は，(7.31) による運動とその過程で交差-再結合が繰り返し起きるものと仮定して，数値的にシミュレートできると考えた†。

まずこのモデルから予想される定性的振舞いをまとめておく。(7.31) を見ると，渦糸タングルは外部から駆動する $\boldsymbol{v}_{sa}$ に乗って流れながら，局所的な渦糸の配置で決まる自己誘導速度で複雑な動きをする。常流体からの

† 渦糸が芯のサイズ程度の微視的距離まで接近したときには，量子的過程により渦糸間の再結合が実現するものと期待されるが，実際それを示す論文[20]が最近報告されている。これは 3 章でとりあげた秩序変数に対する Gross-Pitaevskii 方程式 (3.33) に基づき，いろいろな角度で近づく 2 本の渦糸が 1 カ所で結合し，その後つなぎ換わって離れていく様子を数値的に実証したもので，Schwarz の仮定の正しさを補強している。



7·6 図　渦糸タングルの時間発展の数値シミュレーション。相互摩擦係数 $\alpha = 0.10$ ($T = 1.6\mathrm{K}$ での値)，超流動速度のみがチャネルの手前の断面から奥に向かって，大きさ $v_{s0} = 75$ の場合。
(a) $t_0 = 0$，6 個の渦環の初期配置，(b) $t_0 = 0.0028$，再結合 3 回，
(c) $t_0 = 0.05$，再結合 18 回，(d) $t_0 = 0.20$，再結合 844 回，
(e) $t_0 = 0.55$，再結合 12128 回，(f) $t_0 = 2.75$，再結合 124781 回

摩擦力 α を含む項では，渦糸は $\boldsymbol{w}$ に垂直な面内で自己誘導速度 $\boldsymbol{v}_\mathrm{i}$ の向きと大きさに応じ，膨張による増大，あるいは収縮による減少をする†。そして交差-再結合により，新たに生成される渦糸 (7·5 図) が流されながらランダムな三次元分布に発展し，一方で渦糸の流体内部での減少や境界での減衰とつり合って，渦糸タングルの定常状態が維持されると推測される。

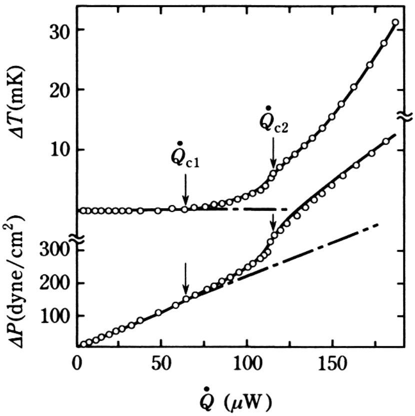
実際に実行された数値シミュレーションの例が 7·6 図である。計算では立方体の中の流体を考え，始めに 6 個の渦環を配置しその時間発展を追った結果である。超流動のみが換算速度 $v_{\mathrm{sa},0} = 75$ で立方体の手前の面から

† これは半径 R の渦環の運動を考えることにより推察できる。この場合渦環半径の時間変化による速度は，$dR/dt = \alpha\,(w - v_\mathrm{i})$，$v_\mathrm{i} = \beta/R$ となることを参照すれば理解できる。

流れており，流れに垂直な 2 つの面では周期条件が課されている (これは十分長いパイプ中の流れに対応)。他の 2 組の面では境界面が粗い壁 (rough wall) として振舞うことにそくして，渦糸の端が面に接したとき壁の突起物にピン止めされたり，そこから離れて滑べり運動するように適当に操作している。十分時間が経過した後では，予想通り渦糸タングルは一様に分布し渦糸長密度 L は定常値となることも確かめられた。数値計算はいくつかの温度に対応した摩擦係数 α, α' に対し，それぞれ何通りかの w_0 に対して実行された。そして前述の力学的スケーリングの議論から得られた結果，例えば (7.40) の L と w の関係において，スケーリングの係数 c_L が L や w に無関係な定数となることも確かめられた。また異方性の係数についても定まった w_0 に対して一定値となることが示された。相互摩擦力の w_0 依存性やその値については，数値シミュレーションの結果が，次に述べる実験の測定結果と極めてよく合うことが示された。

超流動乱流の実験　外部から駆動する流れが，ある臨界速度 v_c を越えないときには渦糸は存在せず，5 章で述べた二流体力学が成立している。パイプ中の常流体では粘性による Poiseuille 流が，そして超流体では粘性がゼロの超流動が実現している。この状態は古典流体に習って，そして渦糸タングルが存在する状態と区別するため層流 (laminar flow) とよばれる。v_c を越えると渦糸が発生し超流動乱流 (superfluid turbulent flow) の状態が実現する。乱流状態を調べる実験的研究もその歴史は古く，測定手段も多岐にわたっている。それらの詳細は J.T.Tough[21] の総合報告および Donnelly[1] の本にゆずることにして，ここでは典型的なそして最も多くの測定がなされている，パイプ中の熱対向流およびそれに関連する実験を取り上げる。そして力学的スケーリングの議論から得られた結果による解析，および数値シミュレーションの結果との比較を行う。

熱対向流での温度差，圧力差　2–6 節で述べたように熱対向流では，パイプの一端でヒーターから単位時間に $\dot{Q}$ の熱エネルギーが注入され，常流体がエネルギー流 $\dot{Q}/\pi a^2 = \rho\sigma T v_n$ を担って他端に流れる ((2.15) ではパイプの断面にわたって平均した常流動速度 V_n で表した)。一方，全質量流をゼロに押さえた実験条件から (2.12) のように v_s は v_n と反対方向に流れる。実験ではパイプの両端での温度差 ΔT と圧力差 ΔP が測定される。その典型的な例が 7·7 図[22] である。$\dot{Q}$ の値が小さい層流では，$\dot{Q}$ に比例した $\Delta T, \Delta P$ が測定され，それが直線 (破線はその延長) 部分である。曲線は



7·7 図 熱対向流での温度差 ΔT と圧力差 ΔP の測定。ヒーターから注入される熱エネルギー $\dot{Q}$ (μW) に対する $\Delta T, \Delta P$ の振舞いは，$\dot{Q} < \dot{Q}_{c1}$ では層流，$\dot{Q}_{c1} \leq \dot{Q}$ で第一渦糸乱流状態に遷移，$\dot{Q}_{c2} \leq \dot{Q}$ で第二の乱流状態に移る。ただしパイプ断面のアスペクト比が 1 に近いとき。

$\dot{Q}_{c1}$ で直線から上に外れ，さらに $\dot{Q}_{c2}$ でもう一度転移して増大を示す。この現象は $\dot{Q}$ が $\dot{Q}_{c1}$ を越えたところで渦糸が発生し，層流から超流動乱流への転移が実現したものと考えられてきた†。以下では測定された温度差と圧力差を，この節で議論してきた，渦糸タングルが存在するときの二流体力学によって解析する。

実験条件下では超流動速度の運動方程式 (7.29) において線形近似が成立するものとする。これは $\boldsymbol{v}_{\rm s}$ 場のゆらぎを無視する限り許されるであろう。このときには相互摩擦力 $\boldsymbol{F}_{\rm sn}$ のみを考慮することになる。常流動速度の運動方程式には，全運動量密度の保存から反作用として $-\boldsymbol{F}_{\rm sn}$ が加わる。さらに実験では定常状態が成立していることを考慮して，結局 2 つの速度場 $\boldsymbol{v}_{\rm s}, \boldsymbol{v}_{\rm n}$ に対する式は，

$$(\rho_{\rm s}/\rho)\,\nabla P - \rho_{\rm s}\sigma\nabla T = \boldsymbol{F}_{\rm sn} \tag{7.52}$$

$$(\rho_{\rm n}/\rho)\,\nabla P + \rho_{\rm s}\sigma\nabla T = -\boldsymbol{F}_{\rm sn} + \eta_{\rm n}\nabla^2\boldsymbol{v}_{\rm n} \tag{7.53}$$

となる。ここで化学ポテンシャルに対する (5.33)(線形近似) を用いた。実

† 第二音波の吸収の測定からも確かめられている。なお 2 つの転移が見られることについては後で議論する。

験との比較には，さらにパイプの断面にわたって平均する必要がある。

まず圧力差を考える目的で上の 2 式を加えると，

$$\nabla P = \eta_{\rm n} \nabla^2 \boldsymbol{v}_{\rm n} \tag{7.54}$$

となり，上に述べたことから当然であるが相互摩擦力は寄与しない。したがって圧力勾配[†]は層流の場合の ∇P_L と同じである。これは 2–6 節で議論した Poiseuille 流であるから ((2.13)，(2.14) 参照)

$$\nabla P_L = -8\eta_{\rm n} V_{\rm n}/a^2 \tag{7.55}$$

と与えられる (断面の半径 a のパイプを考えた)。圧力差ΔP は乱流状態へ移行したとき，層流値からの増加分ΔP_T はわずかではあるが，7·7 図に見られるように有限である。したがってこれを説明するためには，渦糸の発生にともない相互摩擦力とは別の力を考えることが必要となる。可能性としては，超流動速度場または常流動速度場に新たに渦粘性[21)](これは古典乱流で導入された現象論的な粘性) が発生したとする議論，あるいは渦糸がパイプの壁にピン止めされたり，そこから離れて壁を滑べり動くことにより，新たな力が流体に働くとする議論[23)]などがあるが，∇P_T についての確定的な結論は未だ得られていないのが現状である。

一方，温度勾配に対する理解はかなり明快になっている。∇T は (7.52) の ∇P に層流値 ∇P_L を代入して得られる (∇P_T の値は数値的には小さく十分よい近似である) が，これは層流値 ∇T_L とそこからの増加分 ∇T_T の和として

$$\nabla T = \nabla T_L + \nabla T_T \tag{7.56}$$

$$\nabla T_L = \nabla P_L/\rho\sigma = -8\eta_{\rm n} \boldsymbol{V}_{\rm n}/a^2 \rho\sigma \tag{7.57}$$

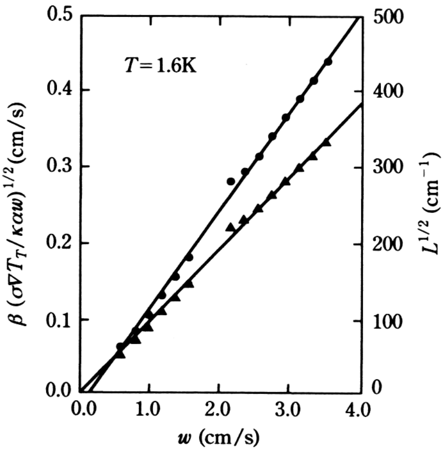
$$\nabla T_T = \boldsymbol{F}_{\rm sn}/\rho_{\rm s}\sigma \tag{7.58}$$

と表される。(7.57) は先に (2.15) で述べたものである。乱流状態で新たに現れる温度差 ∇T_T は相互摩擦力に起因することがわかる。以下では外部から制御するパラメーターとして，$\dot{Q}$ の代わりに相対速度 $|\boldsymbol{v}_{\rm n} - \boldsymbol{v}_{\rm s}| = w$ をとる[††]。

∇T_T と w の測定から渦糸長密度 L を求めるには，$F_{\rm sn}$ の表式 (7.47b) と (7.58) から得られる

† 圧力差はパイプの長さ l にわたり一定勾配とすれば，$\Delta P = l\nabla P$ で与えられる。

†† これは対向流の条件 (2.12) を用いて $w = \dot{Q}/\pi a^2 \rho_{\rm s} \sigma T$ の関係にある。



7·8 図 相対速度 $w\ (= v_{\rm n} - v_{\rm s})$ に対する ∇T_T の測定値の解析。
●印は (7.60) による解析。これは今まで伝統的に用いられたもの。
▲印は (7.59)，(7.61) から得られる (7.62) による解析で，力学的スケーリング理論の正当性を示す。

$$\frac{\sigma \nabla T_T}{\alpha \kappa w} = [I_{/\!/} - c_L I_l]L \tag{7.59}$$

の関係を用いる。

ところで過去数多く温度差の測定が行われてきたが，その解析に際し，伝統的に渦糸タングルの等方性を仮定した (これは (7.47b) で $I_{/\!/} = 2/3$, $I_l = 0$ としたことに相当) 相互摩擦力

$$F_{\rm sn} = \frac{2}{3}\rho_{\rm s}\alpha\,\kappa\,L\,w \qquad \text{あるいは} \qquad \frac{\sigma \nabla T_T}{\alpha\kappa w} = \frac{2}{3}L$$

が用いられ，これから得られた L と w の関係に対しては，2 つの実験的パラメーター γ と v_0 を含む形

$$L^{1/2} = \gamma\,(w - v_0) \tag{7.60}$$

を適用し整理されてきた。その際 γ は T, P に依存する現象論的な普遍定数とみなされてきた。一方，v_0 は多くの場合小さな値であるが，その意味は必ずしも明らかではなっかた。(7.60) により整理された一例が 7·8 図[16] の丸印の点で ($T = 1.6$K の測定値)，縦軸 (右側) の $L^{1/2}$ が w に対してプロットされている。一方，前述の力学的スケーリングの議論から得られた

結果†は (7.40) の関係式

$$L^{1/2} = \frac{c_L}{\beta} w \tag{7.61}$$

で表される。この式の特徴は β が $\beta = (\kappa/4\pi)\log(1/c_1 a L^{1/2})$ と弱いながら $L^{1/2}$ に依存していること，そして (7.60) とは異なり v_0は現れないことである。(7.61) を用いると (7.59) は

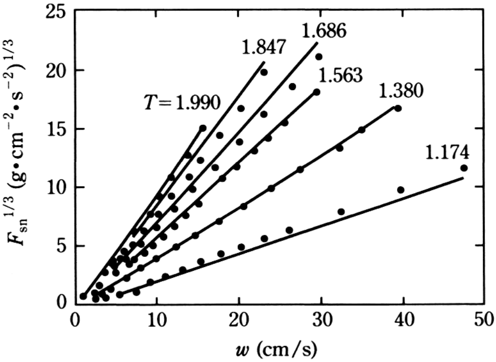
$$\beta \left(\frac{\sigma \nabla T_T}{\alpha \kappa w} \right)^{1/2} = c_L [I_{/\!/} - c_L I_l]^{1/2} w \tag{7.62}$$

となる。この式により先と同じデータを解析したのが 7·8 図の▲印で，縦軸 (左側) と w の関係は原点を通る直線によくのっている。このように物理的意味のはっきりしなかった v_0 は現れず，一方で β の $L^{1/2}$ 依存性を考慮することが重要で，力学的スケーリング理論の正しさを示しているということができる。

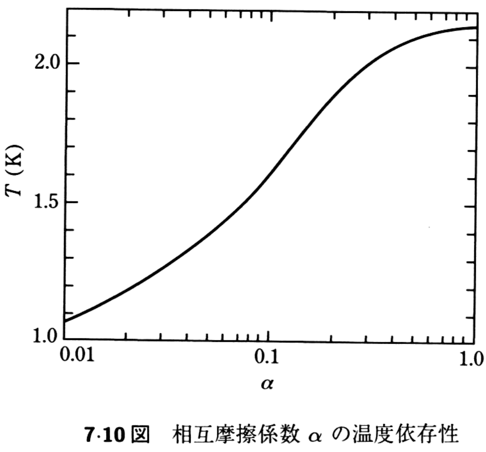
温度を変化させたときの測定結果と，力学的スケーリング理論の数値シミュレーションの結果との一致も得られている。7·9 図[15)]は 25 年前のデータであるが，温度により摩擦係数 α が 7·10 図のように変化するとして，改めて解析した結果である。実線は (7.47c) に含まれるすべての係数を数値シミュレーションにより求めた結果で，これもよい一致を示している。最後により多くの実験結果をまとめて理論と比較したのが 7·11 図[16)]である。いろいろな断面のパイプでの測定，流れの条件も熱対向流と純超流動流 ($v_{\mathrm{n}} = 0$ に保ち v_{s} のみの流れで，図中の×印がそれである) など，5 種類のデータを (7.47c) により解析して求めた係数がプロットされている。異なる実験データの間の一致と同時に，それと数値シミュレーションから得られた実線との一致も顕著である。さらに (7.41)，(7.42) で定義された異方性の係数 $I_{/\!/}, I_{\perp}$ の値は数値シミュレーションにより評価されたが，直接，実験[24),25)]による測定もなされている。第二音波を用い，熱対向流の流れの方向と，それに垂直な方向での吸収を直接測定するもので，得られた結果はシミュレーションによる値と非常によい一致を示した。

以上，熱対向流の実験，なかでも温度差の測定結果と力学的スケーリング理論および渦糸乱流の数値シミュレーションの結果とを比較し，大変よ

† この結果が適用できるためには，渦糸タングルが十分発達して一様な乱流状態にあるときである。7·8 図のデータはそのような領域での測定値で，7·7 図でいえば，$\dot{Q} > \dot{Q}_{\mathrm{c2}}$ の領域に相当する。

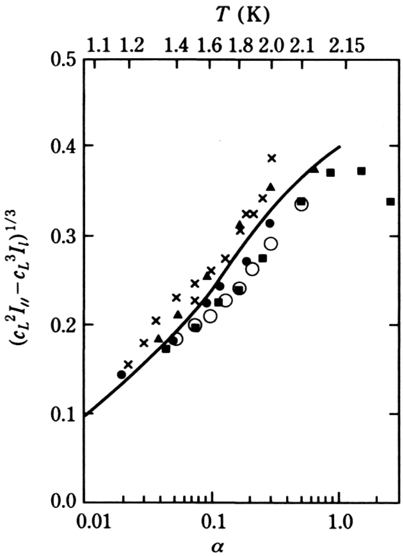


7·9 図 相互摩擦力 F_{sn} の測定値と力学的スケーリング理論の比較。熱対向流 (直径 0.0366cm のガラス・パイプ) での ΔT_T の測定値から得られた F_{sn} の w $(= v_n - v_s)$ による変化。理論式 (7.47c) とよい一致を示す。



7·10 図 相互摩擦係数 α の温度依存性

い一致を見たが，解明されていない問題点もある。先に述べた乱流状態での圧力差の増加についての問題は未解明である。これと関連して，乱流状態での速度場 $\boldsymbol{v}_n(\boldsymbol{r}), \boldsymbol{v}_s(\boldsymbol{r})$ がどのようなプロファイルをとっているかについての流体力学的問題はほとんど議論されていない。層流では $\boldsymbol{v}_n(\boldsymbol{r})$ は粘性により Poiseuille 流，$\boldsymbol{v}_s(\boldsymbol{r})$ は粘性がないのでパイプ断面にわたり一様で



7·11 図　5 種類の実験値および理論値の比較。
∇T_Tの測定値はすべて $F_{\rm sn}^{1/3} \propto w$として解析され，その比例係数は α (横軸にとる) 以外の因子 (縦軸にとる) を含む (7.47c) を用いると，その因子が図に記された量で，その理論値が実線で示される。実験は熱対向流と純超流動流 (×印)，パイプの断面の形 (円，長方形) や径 (0.0366 ~ 1cm) はいろいろな場合のデータが集められている。

あると考えられているが，渦糸タングルが発生したとき単に相互摩擦力のみを考えるのでは，先に述べたように $\boldsymbol{v}_{\rm n}(\boldsymbol{r})$ のプロファイルは層流から変化せず，乱流状態での ∇P_T の出現を説明することができなかった。したがって実際には渦粘性あるいは渦糸と壁の間の力の存在が期待され，このときには速度場のプロファイルも乱流特有のものとなるであろう。最後に 7·7 図に見られたように，2 つの臨界点 $\dot{Q}_{\rm c1}, \dot{Q}_{\rm c2}$ が存在する問題[21]についてふれておく。この 2 つの臨界点はいつも現れるものではない。パイプの断面の縦横の長さが大きく異なる長方形のとき (アスペクト比が大と称される)，あるいはアスペクト比が 1 に近い場合でも純超流動の流れでは，臨界点は $\dot{Q}_{\rm c1}$ のみで，実験的にはそこから $\dot{Q}$ の増加とともに滑らかに渦糸タングルの発達が起きていることを示唆している。一方，円形の断面あるいは縦と横の長さが同じ程度の長方形 (アスペクト比が 1 に近い) のパイプ

では，2つの臨界点 $\dot{Q}_{\rm c1}$, $\dot{Q}_{\rm c2}$ が現れる。このような違いがなぜ起きるかについては明らかになってはいない。後者の場合，$\dot{Q}_{\rm c1} < \dot{Q} < \dot{Q}_{\rm c2}$ の領域では発生した渦糸はまだパイプの中で一様にはなっていないで，例えばパイプの入り口あるいは出口の付近にのみ存在していると推測されてはいるが，今後に残された問題である。

補遺 7　渦糸の運動

ここでは (7.16) および (7.18) の導出をする。まず (7.10) の時間微分をとると，

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = -\kappa \int d\xi\ \boldsymbol{s}'\ (\dot{\boldsymbol{s}} \cdot \nabla)\ \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{s}) + \kappa \int d\xi\ \dot{\boldsymbol{s}}'\ \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{s}) \tag{1}$$

となる。ここでベクトルの微分に対する恒等式

$$\begin{aligned} \nabla \times [(\dot{\boldsymbol{s}} \times \boldsymbol{s}')\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{s})] &= -(\dot{\boldsymbol{s}} \times \boldsymbol{s}') \times \nabla\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{s}) \\ &= \dot{\boldsymbol{s}}\ (\boldsymbol{s}' \cdot \nabla)\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{s}) - \boldsymbol{s}'\ (\dot{\boldsymbol{s}} \cdot \nabla)\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{s}) \end{aligned}$$

を用いると (1) は次のように変形される；

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = &\kappa \nabla \times \int d\xi\ (\dot{\boldsymbol{s}} \times \boldsymbol{s}')\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{s}) - \kappa \int d\xi\ \dot{\boldsymbol{s}}\ (\boldsymbol{s}' \cdot \nabla)\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{s}) \\ &+\kappa \int d\xi\ \dot{\boldsymbol{s}}'\ \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{s}) \end{aligned} \tag{2}$$

次に最後の項を部分積分すると，

$$\int d\xi\ \dot{\boldsymbol{s}}'\ \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{s}) = [\dot{\boldsymbol{s}}\ \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{s})]_{\rm b.v} + \int d\xi\ \dot{\boldsymbol{s}}\ (\boldsymbol{s}' \cdot \nabla)\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{s}) \tag{3}$$

となる。ここで第 1 項の $[\cdots]_{\rm b.v}$ は渦糸の両端での値であるが，これはゼロとしてよい。したがって (2) の最後の 2 項は打ち消してゼロとなる。残る第 1 項を書き直すには次の演算式を用いる。(7.10) と (7.15) から (時間 t は演算に関係しないので省略する)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_l &= \frac{\kappa}{L} \iint d\xi d\xi' |\boldsymbol{s}'(\xi')| \left(\boldsymbol{s}'(\xi) \times \dot{\boldsymbol{s}}(\xi')\right) \delta\left(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{s}(\xi)\right) \delta\left(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{s}(\xi')\right) \\ &= \frac{\kappa}{L} \int d\xi \left(\boldsymbol{s}'(\xi) \times \dot{\boldsymbol{s}}(\xi)\right) \delta\left(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{s}(\xi)\right) \int d\xi' |\boldsymbol{s}'(\xi')|\ \delta\left(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{s}(\xi')\right) \\ &= \kappa \int d\xi \left(\boldsymbol{s}'(\xi) \times \dot{\boldsymbol{s}}(\xi)\right)\ \delta\left(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{s}(\xi)\right) \end{aligned} \tag{4}$$

の関係を得る。2行目は δ 関数の性質を，3行目は (7.14) を用いた。したがって (2) は

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \nabla \times (\boldsymbol{v}_l(\boldsymbol{r},t) \times \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{r},t)) \tag{5}$$

となり，(7.16) を与える。

L の時間変化 (7.18) は，(7.14) の時間微分をとることにより次のように導出される；

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial t} &= -\int d\xi\, |\boldsymbol{s}'|\, (\,\dot{\boldsymbol{s}} \cdot \nabla)\, \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}) + \int d\xi\, \frac{\partial |\boldsymbol{s}'|}{\partial t}\, \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}) \\
&= -\nabla \cdot \int d\xi\, |\boldsymbol{s}'|\, \dot{\boldsymbol{s}}\, \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}) + \int d\xi\, \frac{\boldsymbol{s}' \cdot \dot{\boldsymbol{s}}'}{|\boldsymbol{s}'|}\, \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}) \\
&= -\nabla \cdot\, [L(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{v}_l(\boldsymbol{r},t)] + P_L(\boldsymbol{r},t).
\end{aligned} \tag{6}$$

3 行目第 1 項は (7.15) から得られる。これは渦糸タングルのフラックス $L(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{v}_l(\boldsymbol{r},t)$ の発散項である。そして P_L は上式から (7.19) のように定義される。これは渦糸の素片 Δl が $\Delta l = |\boldsymbol{s}'|\Delta\xi$ と書けることを考慮すれば，

$$P_L(\boldsymbol{r},t) = \int d\xi\ |\boldsymbol{s}'|\ \frac{1}{\Delta l}\frac{\partial \Delta l}{\partial t}\ \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}) \tag{7}$$

と表され，渦糸の長さの伸縮による時間変化率を表している。

8. 二次元系の超流動

固体表面に吸着した ^{4}He の薄い膜を考える。吸着した ^{4}He の第 1 層は基板の固体とヘリウム原子との引力が強いときには固体に，弱いときには液体になる。また，基盤とヘリウム原子の引力が特に強いときには第 2 層まで固体になることもあるが，いずれにしても固体表面に数層の ^{4}He が吸着すると非常に薄い液体の膜ができる。そして，この液体の膜は一層に達しない厚さの膜であっても低温で超流動状態へと転移することが知られている。このような薄い膜での超流動は膜の厚さが回復長 (ξ) に比べて薄いことから考えて二次元的超流動であると考えられる。この章では，二次元超流動についての Kosterlitz-Thouless の理論とそれを検証した実験を紹介する。

8–1　ゆらぎの効果

三次元に比べて二次元ではゆらぎの効果が大きいことはよく知られている。三次元の超流動 ^{4}He では (3.18) で定義したような ODLRO が存在し，秩序変数は $\Psi(\boldsymbol{r}) = \langle\psi(\boldsymbol{r})\rangle$ で与えられた。一方，二次元の液体 ^{4}He では，秩序変数の長波長のゆらぎが Bose 凝縮を破壊するため，上述の意味の ODLRO は存在しない。しかし，後で述べるようなある種の長距離秩序は存在し，超流動状態になる。このような二次元の超流動状態は三次元の場合と比較することによりその特徴がよりはっきりする。

転移点近傍での熱的ゆらぎ　最初，三次元でゆらぎの効果が重要になる転移点近傍を秩序変数 Ψ の汎関数で表されるエネルギーを用いて考察する。それは

$$F = \int d^3r[a|\Psi(\boldsymbol{r})|^2 + \frac{b}{2}|\Psi(\boldsymbol{r})|^4 + c|\nabla\Psi(r)|^2] \tag{8.1}$$

と与えられる自由エネルギーで，超伝導の性質を説明するため，最初に Ginzburg と Landau により現象論的に導入されたものである。詳しい議論は超伝導を扱う 10 章で行うので，ここでは簡単な説明にとどめる。

$\Psi \to \Psi e^{i\theta_0}$ (ただし θ_0 は一定) というゲージ変換に対してエネルギーは変化しないという要請から，F は $|\Psi|^2$ の関数であり，転移点に近づくと $\Psi \to 0$ ということから $|\Psi|^2$ について展開したのが (8.1) の第 1 項，第 2 項である。また，Ψ の空間変化について $\nabla\Psi$ の最低次を考慮したのが第 3 項で $c > 0$ である。

空間的に一様な平衡状態は $\nabla\Psi = 0$ として F が極小値をとるように Ψ が決まる。

$$\begin{aligned} |\Psi_0|^2 &= \frac{|a|}{b} \qquad &: a < 0 \\ &= 0 \qquad &: a > 0 \end{aligned} \tag{8.2}$$

と与えられる。ここで b は安定性から $b > 0$ である。また $T_\lambda > T$ で Ψ_0 が有限になるためには，$a = (T - T_\lambda)a'$ であればよい。

次に，(8.1) の自由エネルギーを用いて $T > T_\lambda$ でのゆらぎを考える。$T > T_\lambda$ では平衡値は $\Psi_0 = 0$ であるが，ゆらぎにより Ψ は有限の値をとる。秩序変数 $\Psi(x)$ が出現する確率 $P\{\Psi\}$ は

$$P\{\Psi\} \propto \exp(-F/k_{\mathrm{B}}T) \tag{8.3}$$

で与えられる。(8.3) を用いて計算すると $T > T_\lambda$ では Ψ の平均値はゼロである。

次に一体の相関関数† $\langle\Psi^*(\boldsymbol{r})\Psi(0)\rangle$ を計算してみよう。T が T_λ にあまり近くない場合を考え，ゆらぎはあまり大きくないとすれば $|\Psi|^4$ 項は無視できる。そのような Gauss 近似が成立すれば期待値の計算は簡単にできる。

$$\Psi(\boldsymbol{r}) = \sum_{\boldsymbol{k}} \Psi_{\boldsymbol{k}} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}, \qquad \Psi^*(\boldsymbol{r}) = \sum_{\boldsymbol{k}} \Psi^*_{\boldsymbol{k}} e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$$

と秩序変数を Fourier 変換すると自由エネルギーは

$$F = \sum_{\boldsymbol{k}} (a + ck^2)\Psi^*_{\boldsymbol{k}}\Psi_{\boldsymbol{k}} = \sum_{\boldsymbol{k}} (a + ck^2)(\Psi^2_{\boldsymbol{k}R} + \Psi^2_{\boldsymbol{k}I}) \tag{8.4}$$

† (3.17) で導入した一粒子密度行列と同じものである。ただし，ここでの平均 $\langle\cdots\rangle$ は (8.3) による統計平均である。

となる。ここで複素数 $\Psi_{\boldsymbol{k}}$ を $\Psi_{\boldsymbol{k}} = \Psi_{\boldsymbol{k}R} + i\Psi_{\boldsymbol{k}I}$ と実部と虚部に分けて表した。(8.4) を用いると

$$\rho_1(\boldsymbol{r}) = \langle \Psi^*(\boldsymbol{r})\Psi(0)\rangle = \sum_{\boldsymbol{k}} e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \langle \Psi_{\boldsymbol{k}}^* \Psi_{\boldsymbol{k}} \rangle$$

$$\langle \Psi_{\boldsymbol{k}}^* \Psi_{\boldsymbol{k}} \rangle = \frac{\int d\Psi_{\boldsymbol{k}R} d\Psi_{\boldsymbol{k}I} \Psi_{\boldsymbol{k}}^* \Psi_{\boldsymbol{k}} \cdot e^{-\frac{F}{k_B T}}}{\int d\Psi_{\boldsymbol{k}R} d\Psi_{\boldsymbol{k}I} e^{-\frac{F}{k_B T}}} = \frac{k_B T}{a + ck^2}$$

となり，$\langle \Psi_{\boldsymbol{k}}^* \Psi_{\boldsymbol{k}} \rangle$ に対して等分配則が成立している。したがって

$$\langle \Psi^*(\boldsymbol{r})\Psi(0)\rangle \sim \frac{e^{-r/\xi_+}}{r} \tag{8.5}$$

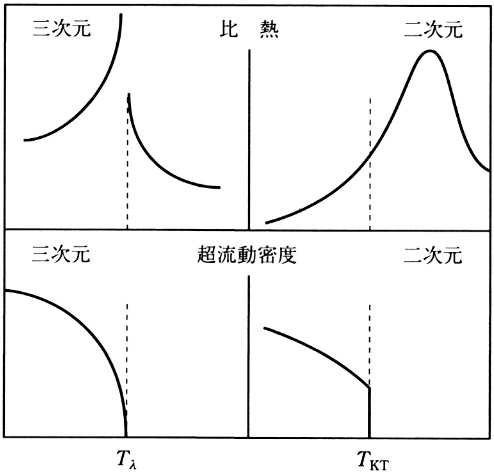
$$\xi_+ = \sqrt{\frac{c}{a}} \propto (T - T_\lambda)^{-1/2} \tag{8.6}$$

を得る。このように $T > T_\lambda$ では有限のコヒーレンス長† ξ_+ より離れた所での相関がゼロになる。すなわち，Ψ についての短距離相関しか存在しない。

実際の超流動 ^{4}He 系では，長波長のゆらぎに対して Gauss 近似が成立しない。しかし，長波長のゆらぎの効果を取り込んでも上で得られた結果は定性的には変化しない。ただし，(8.6) の ξ_+ の温度存在 $(T - T_\lambda)^{-1/2}$ が $(T - T_\lambda)^{-2/3}$ に変わり，また (8.2) の $|\Psi_0| \propto (T_\lambda - T)^{1/2}$ が，$(T - T_\lambda)^{1/3}$ になることを注意しておく。

二次元でのゆらぎ　次に二次元におけるゆらぎの効果についてみてみよう。8·1 図に二次元液体ヘリウムでの比熱と超流動密度の温度依存を三次元の場合と比較して概念図で示した。三次元での比熱が超流動への転移点で対数的に発散している (補遺 1 参照) のに対して，二次元では後述する超流動転移温度 (T_{KT}) よりずっと高温にそれほど鋭くないピークをつくっている。このことは二次元においても三次元での転移点近くから秩序変数 Ψ の振幅は生長し出し比熱にピークをつくるが，ゆらぎのために超流動状態へは低温になるまで転移できないと解釈される。したがって，超流動転移以下の低温の話しをするのであれば，秩序変数の振幅は十分発達していてそのゆらぎは無視でき，位相のゆらぎのみ問題にすればよい。このとき秩序変数は

† (3.37) で導入した回復長に相当する。



8·1 図 二次元および三次元における比熱と超流動密度の転移点近傍での温度変化の概念図

$$\Psi(\boldsymbol{r}) = \Psi_0 e^{i\phi(\boldsymbol{r})} \tag{8.7}$$

と書け†，また，ゆらぎに関係したエネルギーは

$$F = \frac{1}{2}\int d^2 r K_0 |\nabla\phi|^2, \qquad K_0 = 2c|\Psi_0|^2 d \tag{8.8}$$

となる。ここで，d はヘリウム膜の厚さを表す。また，超流動速度が $v_\mathrm{s} = \hbar/m\nabla\phi$ と書けることから，単位面積当たりの超流動密度 σ_s^0 は

$$\sigma_\mathrm{s}^0 = \left(\frac{m}{\hbar}\right)^2 K_0 \tag{8.9}$$

と与えられる。

(8.8) のエネルギーの表式は ϕ について二次型式であるため，確率分布 $P\{\phi\}$ は Gauss 型になり，平均値の計算は簡単にできる。$\phi(\boldsymbol{r}) = \sum_{\boldsymbol{k}} \phi_{\boldsymbol{k}} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$ と Fourier 展開し，(8.8) に代入するとエネルギーは

$$F = \frac{1}{2}K_0 \sum_{\boldsymbol{k}} k^2 \phi_{\boldsymbol{k}}^* \phi_{\boldsymbol{k}} \tag{8.10}$$

となる。ただし，$\phi(\boldsymbol{r})$ は実数ということから $\phi_{-\boldsymbol{k}} = \phi_{\boldsymbol{k}}^*$ である。

(8.10) を用い，一体の相関関数

† スピン $\boldsymbol{S}$ の x 成分 $S_x \to \mathrm{Re}[\Psi_0 e^{i\phi(\boldsymbol{r})}]$，$y$ 成分 $S_y \to \mathrm{Im}[\Psi_0 e^{i\phi(\boldsymbol{r})}]$ と対応させると，スピン系でのいわゆる X-Y モデルと同じ問題になる。

$$\rho_1(\boldsymbol{r}) = \langle \Psi^*(\boldsymbol{r})\Psi(0)\rangle = |\Psi_0|^2 \langle \exp[-i\phi(\boldsymbol{r}) + i\phi(0)]\rangle$$
$$= |\Psi_0|^2 \left\langle \exp\left[-i\sum_{\boldsymbol{k}} \left(e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} - 1\right)\phi_{\boldsymbol{k}}\right]\right\rangle \tag{8.11}$$

における $\phi_{\boldsymbol{k}R}$ と $\phi_{\boldsymbol{k}I}$ についての Gauss 積分を実行すれば,

$$\rho_1(\boldsymbol{r}) = |\Psi_0|^2 \exp\left[-\sum_{\boldsymbol{k}} \frac{k_{\mathrm{B}}T}{K_0 k^2}\{1 - \cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\}\right] \tag{8.12}$$

が得られる。さらに二次元系では

$$\sum_{\boldsymbol{k}} \{1 - \cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\}\frac{k_{\mathrm{B}}T}{K_0 k^2}$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\frac{k_{\mathrm{B}}T}{K_0}\int \frac{dk}{k}\int_0^{2\pi} d\theta[1 - \cos(kr\cos\theta)] \tag{8.13}$$

である。(8.13) において $k > 1/r$ では $\int_0^{2\pi} d\theta[1 - \cos(kr\cos\theta)] \simeq 2\pi$ と近似できるために積分は対数発散をする。積分の上限を原子間距離を a として $1/a$ でカットすると相関関数は,

$$\rho_1(r) = |\Psi_0|^2 \exp\left[-\frac{k_{\mathrm{B}}T}{2\pi K_0}\int_{r^{-1}}^{a^{-1}} \frac{dk}{k}\right]$$
$$\propto \exp\left\{-\frac{k_{\mathrm{B}}T}{2\pi K_0}\ln\left(\frac{r}{a}\right)\right\} \propto r^{-\eta} \tag{8.14}$$

となり, r についてベキの形になる。その指数は温度に依存して

$$\eta = \frac{k_{\mathrm{B}}T}{2\pi K_0} = \frac{k_{\mathrm{B}}T}{2\pi\sigma_{\mathrm{s}}^0}\cdot\left(\frac{m}{\hbar}\right)^2 \tag{8.15}$$

である。したがって $\lim_{r\to\infty}\rho_1(r) = 0$ で ODLRO は存在しない。しかし, 三次元の場合に $T > T_\lambda$ で表式 (8.5) に現れるコヒーレンス長はいまの場合無限に長いと考えられ, その意味では臨界点 $T = T_\lambda$ の状況が出現しているといってよい。(8.14) で表されるある種の長距離秩序は存在する。

このような状態が高温でどこまで存在するか。上述のように位相のゆらぎしか考えないときには $K_0 \neq 0$ すなわち $\sigma_{\mathrm{s}}^0 \neq 0$ であるかぎり, 相関はいつまでも臨界的である。J.M.Kosterlitz と D.J.Thouless[1)]が示したのはこの状態の相転移に渦の励起が大変重要な役割を演じるということである。

二次元での渦　三次元系での渦についてはすでに 3–4 節で述べた。渦は半径 a 程度の芯を持ち, その単位長さ当たりのエネルギーは (3.49) で与

えられた。したがって，厚さ d のヘリウム膜に垂直方向の渦度を持つ量子数 $n=\pm 1$ の一本の渦糸を考えるとそのエネルギーは

$$E_{\mathrm{c}} + \pi K_0 \ln(L/a) \tag{8.16}$$

となる。ただし，$L \times L$ が系の大きさ，また E_{c} は $a > r$ の芯の部分からのエネルギーの寄与 (芯のエネルギー) を表している。(8.16) の孤立した 1 本の渦に対して，渦糸間の距離が R だけ離れた $n=1$ と -1 の渦対を考えると，R より遠くの領域では，対数発散を起こす $v_{\mathrm{s}} \propto 1/r$ の超流動速度は打ち消し合うので，渦対のエネルギーは

$$2E_{\mathrm{c}} + 2\pi K_0 \log(R/a) \tag{8.17}$$

である。

このような渦および渦対がゆらぎにどのように参加し，また超流動にどのように影響を与えるかを考える。まず，エネルギーの小さい，すなわち，R があまり大きくない渦対はゆらぎに参加することは十分予想される。しかし 6–2 節での位相スリップの議論を参考にし，超流動の安定性を考えると，例えば，系の中の適当な 2 点をとり，その 2 点を結ぶ線分を渦対が横切ったとしても 2 点の間の位相は変化しない。したがって，渦対のゆらぎは超流動を破壊するようには作用しないと考えられる。一方，孤立した渦糸，すなわち，渦対のように束縛されていない自由な渦があると超流動を壊す。実際，上述の 2 点を結ぶ線分を渦が 1 本だけ横切ったとすれば 2 点間の位相は $\pm 2\pi$ だけ変化する。したがって，自由な渦が存在するかしないかで系が超流動であるかないかが決まることになる。ところで (8.16) の自由渦のエネルギーをみると $\ln(L/a)$ と系の大きさに依存し，このような渦は熱的に励起されないようにみえる。しかし，次の簡単な議論からも自由渦が高温で存在することがわかる。

いま，大きさ $L \times L$ の系に芯の大きさ a の渦が存在するとして，その位置に関する状態数を考える。独立な渦の状態の数は系を大きさ a の細胞で分割した $(L/a)^2$ 程度であると考えられるので，対数値のみを問題にすると自由エネルギーは (8.16) を用いて

$$F = \pi K_0 \ln(L/a) - k_{\mathrm{B}} T \ln(L/a)^2 \tag{8.18}$$

となる。このようにエントロピーが $\ln(L/a)$ に比例するため

$$T > \frac{\pi K_0}{2k_{\mathrm{B}}} \tag{8.19}$$

の場合には，自由な渦が出現すると考えられる。このことから超流動の転

移温度は,

$$T_c = \frac{\pi K_0}{2k_B} \tag{8.20}$$

と求まる。また,(8.15) で与えられた超流動状態での相関を決める指数 η に対して,(8.19) は,

$$\eta \geq \frac{1}{4} \tag{8.21}$$

の条件を課することになる。

8–2 Kosterlitz-Thouless 理論

これまでの議論からヘリウム薄膜の相転移において渦が本質的な役割を演じることがわかった。渦についての統計力学をくりこみ群の方法を用いて具体的に取り扱ったのが Kosterlitz-Thouless 理論 (K-T 理論)[1]である。

すでに述べたように十分低温を考えると渦はすべて渦対になっている。渦対の数を N 個とすると系のエネルギーは (8.17) より

$$H = -2\pi K_0 \sum_{i>j} n_i n_j \log \frac{|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|}{a} + 2NE_c \tag{8.22}$$

となる。ここで $\boldsymbol{r}_i$ は i 番目の渦の芯の座標,また,n_i はその量子数で $n_i = \pm 1$ である。(8.22) のエネルギーの表式で

$$\pi K_0 = q^2, \qquad q_i = q n_i \tag{8.23}$$

と置きかえると,

$$H = -2 \sum_{i>j} q_i q_j \log \frac{|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|}{a} + 2NE_c \tag{8.24}$$

となる。この式の第 1 項は電荷 q_i と q_j の相互作用の項,第 2 項は距離 a だけ離れた最小サイズの電荷対を作るのに必要なエネルギーとみなすことができ,薄膜での渦の問題は二次元の Coulomb 気体の問題とまったく同等になる。以後問題を渦よりなじみの深い Coulomb 気体の問題として考えることにする。

十分低温で,$2E_c/k_BT \gg 1$ であるとすると,電荷の密度は非常に小さく,しかもすべての電荷は対を作っている。このような状況では電場をかけても電流は流れず,したがって系は絶縁体である。温度が上がると電荷対の密度が大きくなるが,同時にエネルギーの高い,サイズの大きい対も

励起される。電荷どうしの相互作用は周囲の電荷対の分極の影響を受けるから，サイズの大きい対では電荷どうしの引力相互作用は小さい対による遮蔽により弱められ，ついには電離して金属へと相転移する。対での引力相互作用の係数は，他の対の存在を無視したときの q^2 から，誘電定数を ε とすると q^2/ε へと変化する。そして金属に相転移すると，$\varepsilon \to \infty$ となる。以上の議論を超流動膜に対応させると絶縁体相は自由な渦が存在しない超流動相に対応し，(8.22) での係数 K_0 は渦対の影響で

$$K = K_0/\varepsilon \tag{8.25}$$

と変わる。それにともなって (8.9) の超流動密度も

$$\sigma_{\mathrm{s}} = \frac{\sigma_{\mathrm{s}}^0}{\varepsilon} \tag{8.26}$$

と変化する。また，金属相は $\sigma_{\mathrm{s}} = 0$ の常流動相に対応することになる。

上で述べた物理的描像に沿ってくりこみ群の方程式を導く。そのために電荷対の定義をもう少し正確にすることから始めよう。まず一番小さいサイズの対を定義する。q と $-q$ の電荷を選び，その間の距離が dl を微小量として，$a \sim a + dl$ の間にあるとき，これを最小の対と考える。次にそれを除いた電荷で，反対の電荷を持ち，その間の距離が $a(1+dl) \sim a(1+dl)^2$ の間にあるものを次の大きさの対とみなす。このようにして，電荷間の距離 r の対が定義できる。また，大きさ r の対の密度 $p(r)$ も，プラス電荷の位置 r_+，マイナス電荷の位置 r_- しかも，$r = |r_+ - r_-|$ である電荷対の数が $p(r)d^2r_+d^2r_-$ であると定義する。

r の大きさの電荷対において，電荷間の相互作用をスクリーンするのは，r より小さいサイズの熱的に励起された対であると考えられ，したがって，誘電定数 ε は r の関数になる。$\varepsilon(r)$ を r より小さい対の影響をすべて取り込んだ誘電定数とすると，ε は分極率 α により $\varepsilon = 1 + 4\pi\alpha$ と与えられることから

$$\varepsilon(r + dr) = \varepsilon(r) + 4\pi\frac{(qr)^2}{2k_{\mathrm{B}}T}p(r)2\pi r\,dr \tag{8.27}$$

が導かれる。ここで，$(qr)^2/2k_{\mathrm{B}}T$ は古典統計に従う大きさ qr の双極子モーメントによる 1 個当たりの分極率であり†，また，$p(r)2\pi r\,dr$ は $r \sim r + dr$

† モーメント qr を持った電気双極子が古典統計に従うとすると三次元での分極率が 1 個当たり $(qr)^2/3k_{\mathrm{B}}T$ になることはよく知られている。二次元の場合は上の値になる。

間にある電荷対の単位面積当たりの数である。

次に r を $r+dr$ にしたときの対密度 $p(r)$ の変化を考える。$-q$ の電荷が r だけ離れた電荷 q の位置につくる電場の強さを (8.24) から求めると $E(r)=2q/r$ である。したがって，スクリーンされた電場は，

$$E(r)=\frac{2q}{\varepsilon(r)r} \tag{8.28}$$

となる。大きさ r の電荷対は十分希薄であるとすれば，r を $r+dr$ とするとき，対のエネルギーの変化に効くのは (8.28) の有効電場のみであると考えられる。したがって，

$$p(r+dr)=p(r)\exp\left[-\frac{2q^2\,dr}{\varepsilon(r)rk_{\mathrm{B}}T}\right] \tag{8.29}$$

が成立する。

(8.27) と (8.29) から，くりこみ群の方程式が得られる。

$$\frac{d\varepsilon}{dr}=\frac{4\pi^2q^2}{k_{\mathrm{B}}T}r^3p(r) \tag{8.30}$$

$$\frac{dp}{dr}=-\frac{2q^2}{\varepsilon(r)rk_{\mathrm{B}}T}p(r) \tag{8.31}$$

方程式の $r=a$ での初期値は，$p(r)$ についてその定義を考慮して

$$\varepsilon(r=a)=1 \tag{8.32}$$

$$p(r=a)=\frac{1}{a^4}e^{-\frac{2E_{\mathrm{c}}}{k_{\mathrm{B}}T}}=\frac{1}{a^4}y_0^2 \tag{8.33}$$

となる。(8.33) において，$y_0^2=\exp[-2E_{\mathrm{c}}/k_{\mathrm{B}}T]$ は最小の対の存在確率である。また，a で平面を区切った細胞の数が独立に電荷が励起できる場合の数と考え，単位面積当たりその数は $1/a^2$ だけあり，したがって，対では $(1/a^2)^2$ だけあることも考慮した。

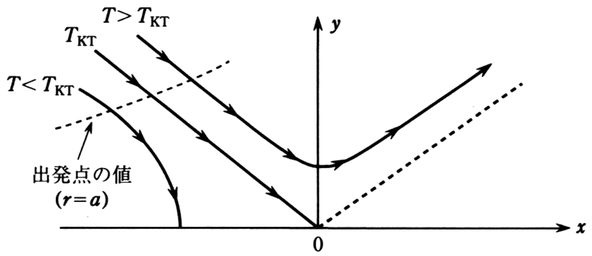
ここで無次元の変数

$$\widetilde{K}=\frac{q^2}{\pi k_{\mathrm{B}}T\varepsilon(r)}=\frac{K}{k_{\mathrm{B}}T} \tag{8.34}$$

$$y^2=r^4p(r) \tag{8.35}$$

$$l=\log r/a \tag{8.36}$$

を導入すると，くりこみ群の方程式 (8.30)，(8.31) は



8·2 図 くりこみ群の方程式の流れの図。

$$\frac{d\widetilde{K}^{-1}}{dl} = 4\pi^3 y^2 \tag{8.37}$$

$$\frac{dy}{dl} = (2 - \pi\widetilde{K})y \tag{8.38}$$

になる。y は (8.35) から類推されるように大きさ r の対の存在確率と，また $\widetilde{K}$ は (8.9)，(8.23)，(8.26) より

$$\widetilde{K}(l) = \frac{K_0}{\varepsilon k_B T} = \left(\frac{\hbar}{m}\right)^2 \frac{\sigma_s}{k_B T} \tag{8.39}$$

となり，渦対の影響を考えた有効超流動密度 σ_s と関係した量である。(8.37), (8.38) において，対と対の間の距離が対の大きさと同じ程度であるときの補正が計算されている。両式とも，その補正項は y の高次であることが示される。したがって，方程式 (8.37)，(8.38) が成立するためには y が十分小さいということが必要である。

(8.37)，(8.38) は，変数

$$x = \frac{2}{\pi}\widetilde{K}^{-1} - 1 \tag{8.40}$$

を導入して，さらに簡単な形

$$\frac{dx}{dl} = 8\pi^2 y^2 \tag{8.41}$$

$$\frac{dy}{dl} = 2xy \tag{8.42}$$

にすると扱いやすい。ただし，$x \ll 1$ とした。これは後でみるように転移点近傍を考えることに相当する (8.41)，(8.42) は解析的に解くことができ，その結果を 8·2 図に示す。8·2 図は $l = \log(r/a)$ を 0 から増大させたときの x, y の振舞いを示したもので，流れの図とよばれる。(8.41)，(8.42) には次

のような積分が存在する。

$$x^2 - 4\pi^2 y^2 = x_0^2 - 4\pi^2 y_0^2 = C \tag{8.43}$$

ここで，定数 C は流れの出発点の値 $r = a$ での条件 (8.32)，(8.33) で与えられる温度の関数である。8·2 図での流れの様子は $C = 0$ を境にして異なっている。$C = 0$ を与える温度を T_{KT} とし，T_{KT} を Kosterlits-Thouless の転移温度とよぶ。

$T = T_{\mathrm{KT}}$ では流れは原点に向かう直線で

$$y = -\frac{x}{2\pi} = \frac{1}{4\pi l} = \frac{1}{4\pi \log(r/a)} \tag{8.44}$$

と与えられ，$l \to \infty$ で $x = 0$。したがって

$$\lim_{l \to \infty} \widetilde{K}(l) = \frac{2}{\pi} \tag{8.45}$$

である。$T_{\mathrm{KT}} > T$ は $C > 0$ に対応し，図からわかるように $r \to \infty$ のとき $y \to 0$ となる。このことはサイズの大きな対は存在しないことを意味し，したがって，系は絶縁体である。T が T_{KT} に近いとして

$$C = C'(T_{\mathrm{KT}} - T) \tag{8.46}$$

と展開して，$\widetilde{K}$ を計算すると

$$\widetilde{K}(\infty) = \frac{2}{\pi} + b|T_{\mathrm{KT}} - T|^{1/2} \tag{8.47}$$

が得られる。ただし，b は正の定数である。(8.45) は (8.20) の K_0 を K で置き換えた式であり，したがってくりこみを行っても (8.21) の不等式が成立する。一方，$T > T_{\mathrm{KT}}$ では y は l の増大にともない一度減少するがその後増大する。そして，(8.46) を用いて (8.41)，(8.42) の方程式を解くと

$$l \simeq \frac{1}{b(T - T_{\mathrm{KT}})^{1/2}} \tag{8.48}$$

では y が 1 程度の大きさにまでなることが示される。すなわち，(8.48) で決まる r より大きいサイズの対の密度が非常に大きくなり，もはや束縛された対とよべる状態ではなくなることになる。対は電離していると考えられる。電離した自由な電荷，すなわちもとの超流動膜で考えれば自由な渦は位相の相関を壊す。したがって，一体の相関関数は (8.14) のベキの形から

$$\langle \Psi^*(\boldsymbol{r})\Psi(0)\rangle \propto \exp\left[-\frac{r}{\xi_+}\right]$$

と指数関数形に変化する。そのコヒーレンス長 ξ_+ は自由な渦の平均間隔

で決まり，それは (8.48) から

$$\xi_+ = a \exp\left[\frac{1}{b(T-T_{\mathrm{KT}})^{1/2}}\right] \tag{8.49}$$

となる。また自由な渦の密度 n_{free} は，A を 1 程度の定数として

$$n_{\mathrm{free}} \simeq A \cdot \xi_+^{-2} \tag{8.50}$$

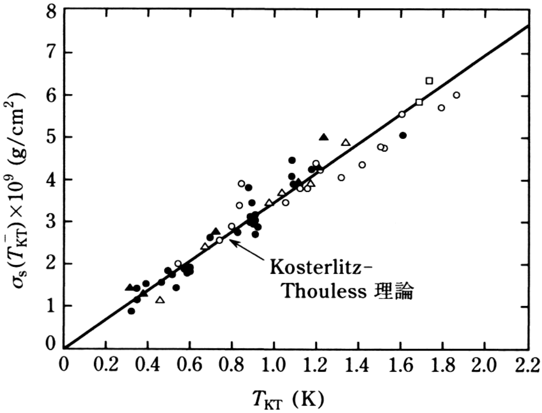
と与えられる。

ξ_+ の温度依存が通常の相転移の場合とまったく異なっていることに注意する必要がある。スケーリングの議論から相転移でのゆらぎにともなう自由エネルギーは ξ_+^{-2} に比例していることが導けるが†，その自由エネルギーの温度微分で与えられる比熱などの熱力学量に ξ_+ が (8.49) のように温度変化する場合には特異性がまったく現れない (8·1 図)。

特異性は系の長波長での性質に現れる。$\widetilde{K}(\infty)$ は低温から T_{KT} に近づくと (8.47) のように $2/\pi$ に近づく。このとき，(8.39) から

$$\frac{\sigma_{\mathrm{s}}(T_{\mathrm{KT}})}{T_{\mathrm{KT}}} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{k_{\mathrm{B}} m^2}{\hbar^2} \tag{8.51}$$

が成り立つ。一方，$T > T_{\mathrm{KT}}$ では $\sigma_{\mathrm{s}} = 0$ となる。したがって，超流動密



8·3 図 Kosterlitz-Thouless の転移温度における超流動成分のとび。▲●はねじれ振動子，○△□は第三音波の実験結果である。

† スケール変換により長さの単位を s 倍変化させると，例えば系のサイズは $L \to s^{-1}L$ と変化し，同様にコヒーレンス長も $\xi \to s^{-1}\xi$ となる。一方，全自由エネルギーはスケール変換により変化しないので d 次元での自由エネルギー密度は $F \to s^d F$ と変換される。このことから系を特徴づける長さが L 以外に ξ しか存在しない場合は $F \propto \xi^{-d}$ が成立する。

度には 8·1 図で示したような $T = T_{\mathrm{KT}}$ でとびが現れる。T_{KT} とそのときのとびσ_{s} は基板の固体の種類や薄膜の厚さによっても異なるが，その間には (8.51) で与えられるような普遍的な関係があるというのが K-T 理論の結論である。実験結果を 8·3 図に示す[3]。図における実験の点は，第三音波やねじれ振動子など異なった方法でいろいろな実験グループが求めたものであるが，(8.51) 式で与えられる直線との一致は非常によい。

8–3 動的現象[3]

8·3 図で示した超流動密度はねじれ振動子や第三音波を用いて測定されたものであった。実際のこれらの測定では有限の振動数で行われ，したがって図で示したのは振動数 $\omega \to 0$ の極限の場合と考えられるが，前節の K-T 理論を ω 有限の場合に拡張しておくのも重要である。

渦の運動方程式　二次元の超流動 ^{4}He において渦の励起が重要であることはすでに述べた。K-T 理論を有限の ω の場合に拡張するとき，外場の時間変化に対して渦がどのような運動をするか，渦についての運動方程式が問題になる。もし，ヘリウムが吸着している壁による渦のピン止めが無視できるとすると，三次元の渦の速度の式，(7.23)

$$\frac{d\boldsymbol{s}}{dt} = \boldsymbol{v}_{\mathrm{s}} + \alpha \boldsymbol{s}' \times (\boldsymbol{v}_{\mathrm{n}} - \boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}) - \alpha' \boldsymbol{s}' \times (\boldsymbol{s}' \times (\boldsymbol{v}_{\mathrm{n}} - \boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}))$$

を用いることができる。

薄膜に垂直に z 方向，平行に x, y 座標をとると，渦度の方向は $\pm\hat{z}$，渦糸の曲率はゼロなので自己誘導速度 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{i}} = 0$ である。したがって $\boldsymbol{s}_i = (x_i, y_i)$ を i 番目の渦の芯の位置とすると，$\boldsymbol{s}' = n_i \hat{\boldsymbol{z}}$ に注意して その速度は

$$\frac{d\boldsymbol{s}_i}{dt} = n_i \frac{D\kappa\sigma_{\mathrm{s}}^0}{k_{\mathrm{B}}T} \hat{\boldsymbol{z}} \times (\boldsymbol{v}_{\mathrm{n}} - \boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}^i) + \alpha'(\boldsymbol{v}_{\mathrm{n}} - \boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}^i) + \boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}^i \qquad (8.52)$$

となる。ここで，$n_i = \pm 1$ また

$$\alpha = \frac{D\kappa\sigma_{\mathrm{s}}^0}{k_{\mathrm{B}}T} \qquad (8.53)$$

により，D を導入したが，D の物理的意味については後述する。(8.52) 式で $\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}^i$ は座標 $\boldsymbol{s}_i$ における局所的な超流動速度であり，$\boldsymbol{v}_i = 0$ なので，一様な流れの速度 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{sa}}$ と非局所的寄与 (他の渦糸からの速度場) $\boldsymbol{v}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{nol}}$ の和で，$\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{i}} = \boldsymbol{v}_{\mathrm{sa}} + \boldsymbol{v}_i^{\mathrm{nol}}$ と書ける ((7.13) 参照)。K-T 理論で行われた近似において，

問題にするのは孤立した $n=1$ と $n=-1$ の渦対と自由な渦のみであるが，渦対においては対の相手の渦による速度場は重要で，したがって，$\boldsymbol{v}_i^{\rm nol} \neq 0$ である。ただし，自由渦を考えるときには $\boldsymbol{v}_i^{\rm nol} = 0$ としていい。

一方，渦が運動することによる $\boldsymbol{v}_{\rm sa}$ の時間変化も (6.11) から導ける。二次元においては，(7.10) は

$$\boldsymbol{\omega}(r,t) = \kappa \sum_i n_i \widehat{\boldsymbol{z}} \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{s}_i)$$

となる。この式を (6.11) に代入し，(6.11) 導出のとき行ったように流れの方向に Δx をとり，それに垂直方向の薄膜の幅を w として，領域 $\Delta A = w\Delta x$ での平均で $\boldsymbol{v}_{\rm sa}$ を

$$\boldsymbol{v}_{\rm sa} = \frac{1}{\Delta A} \int_{\Delta A} \boldsymbol{v}_{\rm s} d^2 r$$

を定義すると

$$\frac{d\boldsymbol{v}_{\rm sa}}{dt} = -\sum_{i \in \Delta A} \frac{\kappa}{\Delta A} n_i \widehat{\boldsymbol{z}} \times \frac{d\boldsymbol{s}_i}{dt} \tag{8.54}$$

が求まる。ただし，$\sum_{i \in \Delta A}$ は領域 ΔA に存在する渦についての和を意味している。

二次元 Coulomb 系との対応　　(8.52) と (8.54) の運動方程式は古典 Coulomb 気体での運動方程式に対応させることができる。まず，二次元の Coulomb 気体で電荷 $n_i q$ ((8.23) より $q^2 = \frac{\kappa^2}{4\pi}\sigma_{\rm s}^0$) に局所電場 $\boldsymbol{E}(s_i)$ がかかっているとする。電荷が拡散係数 D の Brown 運動をするときには，その速度は

$$\frac{d\boldsymbol{s}_i}{dt} = \frac{D}{k_{\rm B}T} n_i q \boldsymbol{E}(s_i) \tag{8.55}$$

となる。ここで，Einstein の関係式から，易動度は $\mu = D/k_{\rm B}T$ である。

さらに Coulomb 気体では $\pm q$ の電荷対による，分極がある。外場 $\boldsymbol{E}_{\rm ex}$ と電場 $\boldsymbol{E}(r)$ の平均値，すなわち巨視的な電場との間によく知られた関係

$$\langle \boldsymbol{E}(r) \rangle = \boldsymbol{E}_{\rm ex} - 4\pi \boldsymbol{P} \tag{8.56}$$

がある。ここで $\boldsymbol{P}$ は単位面積当たりの双極子モーメントの平均値であるが，その時間変化は電荷の運動で与えられ，

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = \sum_{i \in \Delta A} \frac{n_i q}{\Delta A} \cdot \frac{d\boldsymbol{s}_i}{dt} \tag{8.57}$$

となる。

(8.52) と (8.55)，(8.54) と (8.57) の間の類似に注目しよう。ただし (8.52) の右辺で第 2，第 3 項は (8.55) にはない。しかし，K-T 理論での近似，孤立した自由渦と孤立した渦対のみを考える場合には，第 2，第 3 項による渦の運動は $\boldsymbol{v}_{\rm sa}$ の時間変化には寄与しないとしてよい。それは次の考察から理解できる。まず，第 2，第 3 項は渦対間の距離を変化させないので，(8.54) 式へは寄与しないことは明らかである。また，孤立した渦の場合でも，ねじれ振動子の実験では $\boldsymbol{v}_{\rm n} /\!/ \boldsymbol{v}_{\rm sa}$ ，また第三音波の場合には $\boldsymbol{v}_{\rm n} = 0$ であることを考慮すると，第 2，第 3 項により渦は $\boldsymbol{v}_{\rm sa}$ に平行に運動することになり，これもまた $\boldsymbol{v}_{\rm sa}$ を時間変化させない。このようにして，(8.52) 式の第 2，第 3 項を落とすと (8.55) と完全に対応させることができる。このとき物理量の間の対応関係は，

$$\begin{aligned} q\boldsymbol{E}(r) \quad &\longleftrightarrow \quad \sigma_{\rm s}^0 \kappa \hat{\boldsymbol{z}} \times [\boldsymbol{v}_{\rm n} - \boldsymbol{v}_{\rm s}(\boldsymbol{r})] \\ 4\pi q\boldsymbol{P} \quad &\longleftrightarrow \quad \sigma_{\rm s}^0 \kappa \hat{\boldsymbol{z}} \times \boldsymbol{v}_{\rm sa} \\ q\boldsymbol{E}_{\rm ex} \quad &\longleftrightarrow \quad \sigma_{\rm s}^0 \kappa \hat{\boldsymbol{z}} \times \boldsymbol{v}_{\rm n} \end{aligned} \tag{8.58}$$

ととればよい。したがって，(8.52) で導入した D は素励起 (フォノン，ロトン)，またはリプロン (表面波モード) に散乱されて Brown 運動をしている渦の拡散係数を表していることがわかった。

ねじれ振動子の実験　ねじれ振動子の実験は 2–3 節で述べた Andronikashvili による常流動密度測定の実験と原理は同じ実験である。薄膜中の常流動成分は ω で振動する振動子といっしょに運動する。このとき渦がなければ，超流動成分は常流動の運動についていかないが渦が存在する場合には超流動成分の一部が $\boldsymbol{v}_{\rm n}$ にひきずられて常流動の運動に参加する。

(8.58) の対応関係を用いると，この実験において $\boldsymbol{v}_{\rm n}$ は外場に対応し，また振動数に依存した誘電率 $\varepsilon(\omega)$ を導入すると電磁気学における関係式

$$4\pi\boldsymbol{P} = [1 - \varepsilon^{-1}(\omega)]\boldsymbol{E}_{\rm ex}$$

に対応して，

$$\boldsymbol{v}_{\rm sa} = [1 - \varepsilon^{-1}(\omega)]\, \boldsymbol{v}_{\rm n} \tag{8.59}$$

が成り立つ。さらに単位面積当たりの全運動量 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r})$ はヘリウムの全質量密度 (単位面積) を σ とすると

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}) = \sigma_{\mathrm{s}}^{0}\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r}) + (\sigma - \sigma_{\mathrm{s}}^{0})\boldsymbol{v}_{\mathrm{n}} \tag{8.60}$$

であるが，この式の領域 ΔA での平均をとれば，(8.59) を用いると

$$\langle \boldsymbol{g}(\boldsymbol{r})\rangle = \sigma_{\mathrm{s}}^{0}\boldsymbol{v}_{\mathrm{sa}} + (\sigma - \sigma_{\mathrm{s}}^{0})\boldsymbol{v}_{\mathrm{n}} = \left[\sigma - \frac{\sigma_{\mathrm{s}}^{0}}{\varepsilon(\omega)}\right]\boldsymbol{v}_{\mathrm{n}} \tag{8.61}$$

が得られる。上式の $\sigma_{\mathrm{s}}^{0}v_{\mathrm{sa}}$ は渦が存在するため $\boldsymbol{v}_{\mathrm{n}}$ にひきずられて常流動の運動に参加する超流動部分を表している。その結果，超流動密度は

$$\sigma_{\mathrm{s}} = \frac{\sigma_{\mathrm{s}}^{0}}{\varepsilon(\omega)} \tag{8.62}$$

となり，(8.26) を有限の ω に拡張した表式が得られる。

(8.62) より，ヘリウム薄膜の寄与による振動子の振動周期 P の変化は

$$\Delta P \propto \mathrm{Re}[\varepsilon^{-1}(\omega)] \tag{8.63}$$

となり，薄膜での散逸による振動の減退を決める Q 値も

$$Q^{-1} \propto \mathrm{Im}[-\varepsilon^{-1}(\omega)] \tag{8.64}$$

で与えられる。

K-T 理論を用いた $\varepsilon(\omega)$ の計算は次のように行う。まず，T_{KT} より低温では束縛された対の寄与のみを考えればよい。外場 E_{ex} がかかったとき対 (双極子) は外場の方向に向こうとするが，それに要する応答時間は r の大きさの対では拡散係数 D により $\tau(r) \sim r^2/D$ となる。実際，Fokker-Planck 方程式を用いた計算が行われ[4]，その結果は

$$\tau(r) = \frac{r^2}{14D} \tag{8.65}$$

と近似できることが示された。前節 (8.27) で述べたように，静的 $(\omega = 0)$ な場合には，間隔が $r \sim r + dr$ の束縛対の誘電率への寄与は $d\varepsilon/dr \cdot dr$ であったが，有限の振動数 ω のもとでは，その遅延効果をとり入れる必要があり，それを

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \int_a^{\infty} dr \frac{d\varepsilon(r)}{dr} g(r, \omega) \tag{8.66}$$

と表すことにする。ここで導入した応答関数 $g(r,\omega)$ の形は次のような考察から推測できる。$\omega\tau(r) \ll 1$ を満たすような間隔 r の小さい渦対は，外場の振動に追随することが可能であるが，$\omega\tau(r) \gg 1$ を満たす大きな渦対はそれに追随できない。いま，$\omega\tau(r) = 1$ により定義される拡散距離

$$r_{\mathrm{D}} = \left(\frac{14D}{\omega}\right)^{1/2} \tag{8.67}$$

を導入すると，$r < r_{\mathrm{D}}$ の対は ω の運動に追随できるが，$r > r_{\mathrm{D}}$ の対には遅れが現われることになる。このような振舞いを考慮すれば，最も単純な $g(r,\omega)$ の形として

$$g(r,\omega) = \frac{1}{1 - i\omega\tau(r)} \tag{8.68}$$

ととることができる。

(8.66) の計算に際し，$\varepsilon(r)$ が r の緩やかな関数であることを考慮し，以下の近似を採用する。まず $\mathrm{Re}\, g(r,\omega)$ に対しては $\omega\tau(r) \lesssim 1$ を満たす r の対の寄与のみで近似できるとし

$$\mathrm{Re}\, g(r,\omega) = \theta(\tau^{-1}(r) - \omega) = \theta(r_{\mathrm{D}} - r) \tag{8.69}$$

とする†。一方，$\mathrm{Im}\, g(r,\omega)$ に対しては $\omega\tau(r) \simeq 1$ からの寄与が大きいとして

$$\mathrm{Im}\, g(r,\omega) = \frac{\omega\tau(r)}{1 + (\omega\tau(r))^2} \simeq \frac{\pi}{4} r\delta(r - r_{\mathrm{D}}) \tag{8.70}$$

と近似する。このとき (8.66) は

$$\mathrm{Re}\, \varepsilon(\omega) = 1 + \int_a^{r_{\mathrm{D}}} dr \frac{d\varepsilon}{dr} = \varepsilon(r_{\mathrm{D}}) \tag{8.71}$$

$$\mathrm{Im}\, \varepsilon(\omega) = \frac{\pi}{4} \left(r \frac{d\varepsilon}{dr}\right)_{r=r_{\mathrm{D}}} \tag{8.72}$$

となる。

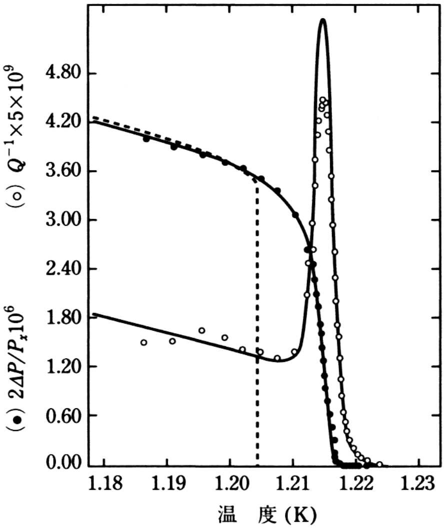
一方，$T > T_{\mathrm{KT}}$ では，$\xi_+ > r$ の束縛対からの誘電率への寄与 $\varepsilon_{\mathrm{b}}(\omega)$ と，遊離した自由渦 (電荷) からの寄与 $\varepsilon_{\mathrm{f}}(\omega)$ がある。それらは各々

$$\varepsilon_{\mathrm{b}}(\omega) = 1 + \int_a^{\xi_+} dr \frac{d\varepsilon}{dr} g(r,\omega) \tag{8.73}$$

$$\varepsilon_{\mathrm{f}}(\omega) = \frac{4\pi i}{\omega}\sigma_{\mathrm{c}} = \frac{4\pi i}{\omega} n_{\mathrm{f}} q^2 \frac{D}{k_{\mathrm{B}}T} \tag{8.74}$$

と考えられる。(8.73) は $\xi_+ > r_{\mathrm{D}}$ であれば先に議論した $T < T_{\mathrm{KT}}$ の場合と同じ結果となる。$\xi_+ \sim r_{\mathrm{D}}$ では，その評価は必ずしも容易ではないが，この場合には $\varepsilon_f(\omega)$ の寄与の方が大となることが示される。(8.74) におい

† $\theta(x)$ は，$\theta(x) = 1$ $(x > 0)$，$\theta(x) = 0$ $(x < 0)$ を満たす階段関数である。



8·4 図 ねじれ振動子の周期の変化 ΔP (●) と減衰 Q^{-1} (○) の温度変化。点線は $\omega=0$ の場合の ΔP を示す。

て σ_c は電気伝導率であるが，それは自由電荷 q と密度 n_f，そして易動度 $\mu=D/k_BT$ により表される ((8.50) 参照)。

8·4 図は D.J.Bishop と J.D.Reppy[2] によるねじれ振動子による実験結果を示す。ΔP は連続的に変化し T_{KT} より高温で急激に減少し，一方，吸収はその温度で鋭いピークを示す。実線は上述の (8.71)，(8.72) そして (8.73)，(8.74) の理論曲線であり，実験とのよい一致を示している。

第三音波　第三音波についてはすでに 5–4 節で議論したが，二次元ヘリウム膜での興味は，渦が第三音波にどのような効果を及ぼすかである。まず渦が存在するときの $\boldsymbol{v}_s$ に対する運動方程式を考える。それは (5.67) を拡張し得られる。渦が存在する場合には (7.17) より

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_s}{\partial t}=\boldsymbol{v}_l\times\boldsymbol{\omega}-f\nabla\xi \tag{8.75}$$

となる。ただし，$\xi(x,y)$ は薄膜の厚さの変化で $\nabla\xi=(\partial\xi/\partial x,\partial\xi/\partial y)$ である。また，渦度 $\boldsymbol{\omega}$ は z 方向を向き

$$\boldsymbol{\omega}=\nabla\times\boldsymbol{v}_s=\frac{\partial v_{sy}}{\partial x}-\frac{\partial v_{sx}}{\partial y} \tag{8.76}$$

である。ξ の時間変化は非圧縮性流体を仮定して，質量保存則から得られる。これは (5.61) と同じ

$$\rho\frac{\partial\xi}{\partial t}+\sigma_{\mathrm{s}}^{0}\nabla\cdot\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}=0 \tag{8.77}$$

である。

次に上記の方程式を渦流について平均して，渦の影響を振動数に依存した誘電率を用いて取り入れる。そのために，(8.75)，(8.76)，(8.78) の方程式を電磁気の方程式，すなわち真空中の Maxwell 方程式に対応させることから始める。まず，(8.58) の対応関係から ($\boldsymbol{v}_{\mathrm{n}}=0$)

$$q\boldsymbol{E}\longleftrightarrow\sigma_{\mathrm{s}}^{0}\kappa\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}\times\widehat{\boldsymbol{z}}$$
$$q^{2}\longleftrightarrow\frac{\kappa^{2}}{4\pi}\sigma_{\mathrm{s}}^{0}$$

したがって，(8.76) は Maxwell 方程式

$$\nabla\boldsymbol{E}=4\pi qN_{v} \tag{8.78}$$

に対応する。ただし

$$\boldsymbol{\omega}=\kappa N_{v}\widehat{\boldsymbol{z}},\qquad N_{v}(\boldsymbol{r},t)=\sum_{i}n_{i}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}_{i}(t)) \tag{8.79}$$

N_v は単位面積当たりの渦糸の数，正確には上向きと下向きの渦糸の差である。次に

$$\frac{q}{c_3}\boldsymbol{H}\longleftrightarrow-\rho\kappa\xi\widehat{\boldsymbol{z}} \tag{8.80}$$

と対応させて，磁場の強さ $\boldsymbol{H}$ を導入すると，(8.75)，(8.77) はそれぞれ，

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\frac{4\pi}{c_3}q\boldsymbol{J}_{v}+\frac{1}{c_3}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{8.81}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c_3}\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t} \tag{8.82}$$

となることが示せる。ただし c_3 は渦がない場合の第三音波の音速 (5.69) で，$c_3^2=f\sigma_{\mathrm{s}}^0/\rho$ であり，$\boldsymbol{J}_v$ は渦糸の流れ密度 $\boldsymbol{J}_v=\sum n_i\dot{\boldsymbol{s}}_i\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}_i(t))$ である。さらに，ξ が x,y の関数であることを考慮すると，(8.80) より $\nabla\cdot\boldsymbol{H}=0$ となることが示される。

このようにして，微視的電磁場に対応する方程式が得られたが，次に，渦対の遮蔽効果 (先に議論したくりこみ効果) を考慮する。それは媒質中を伝播する電磁波を考えることに相当し，振動数 ω の電場 $E_\omega(\boldsymbol{r})$ と電束密

度 $D_\omega(\boldsymbol{r})$ の間の関係 $D_\omega = \varepsilon(\omega)E_\omega$ により，(8.78)，(8.81) の E を置き換えればよい。このとき電磁波の分散関係は

$$\omega^2 = \frac{c_3^2 k^2}{\varepsilon(\omega)} \tag{8.83}$$

となる。電磁波では $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ が波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ に垂直な横波であるが，ヘリウム系では $\boldsymbol{v}_\mathrm{s}$ と $\boldsymbol{k}$ は同じ方向き縦波となり，第三音波を表している。

(8.83) の分散関係は，$T < T_\mathrm{KT}$ では (8.71)，(8.72) を用いて評価でき，$T > T_\mathrm{KT}$ では (8.73)，(8.74) により求めることができる。温度が十分に低く渦の励起が無視できる場合の音速 c_3 の第三音波は，T_KT に近づくにつれて渦の影響で σ_s とともに音速が減少し減衰も大きくなる。先の 8·3 図に示される第三音波による測定値は，急激な減衰の増大により，第三音波の信号が消えてしまう温度と，そのときの σ_s の値を比較的低振動数でヘリウム膜の厚さを変えて測定したものである[5)]。しかし振動数 ω が十分大きく次の条件を満たす場合には，$T > T_\mathrm{KT}$ でも第三音波は伝播可能である。$\mathrm{Im}\,\varepsilon(\omega)$ は，自由渦による減衰が主に寄与するとして，(8.74) で与えられる。一方，$\mathrm{Re}\,\varepsilon(\omega)$ は，$T = T_\mathrm{KT}$ での $\varepsilon(0)$ で近似する。(8.34) と (8.45) の $\widetilde{K} = 2/\pi$ を用いて $\mathrm{Re}\,\varepsilon(\omega) \simeq q^2/2k_\mathrm{B}T_\mathrm{KT}$ となる。したがって $\mathrm{Re}\,\varepsilon(\omega) \gg \mathrm{Im}\,\varepsilon(\omega)$ の条件は

$$\omega \gg Dn_\mathrm{f} \tag{8.84}$$

となり，これを満たすときには第三音波は伝播できることになる。

9. Fermi 粒子系

すでに，1 章で述べたようにヘリウムには 2 種類の安定な同位元素，^{4}He と ^{3}He がある。そのうち Bose 粒子である ^{4}He については 8 章までに詳しくみてきた。本章からは，もう一つの同位元素，Fermi 粒子である ^{3}He について考察する。液体 ^{4}He は温度 2K 近傍で Bose-Einstein 凝縮を起し，超流動状態へ転移した。液体 ^{3}He も 1~2mK という極低温まで温度を下げると超流動になるがそれまでは常流動状態にある。超流動 ^{3}He については後で詳しく述べることとして，この章では常流動状態の ^{3}He Fermi 液体について考える。

9-1 理想 Fermi 気体

液体 ^{4}He と同じように液体 ^{3}He においても，^{3}He 原子間には van der Waals の強い相互作用が存在する。ここで，最初に相互作用をしていない理想 Fermi 気体を考えるのは，理想気体で成立している概念が液体 ^{3}He を理解していくうえでその基礎となり大変重要だからである。

相互作用をしていないスピン 1/2 の Fermi 粒子 N 個を体積 V の容器に閉じ込めたとすると，系全体の波動関数 $\boldsymbol{\Phi}$ は，理想 Bose 気体での (3.1) 式と同様に一粒子波動関数 $\phi_{\boldsymbol{p}\sigma}(\boldsymbol{x})$ の積で

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_N) = \mathrm{AS} \prod_{i=1}^{N} \phi_{\boldsymbol{p}_i \sigma_i}(\boldsymbol{x}_i) \tag{9.1}$$

と表される。ただし，AS は反対称演算子で，粒子の座標 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_N$ についてのすべての可能な置換を行い，偶置換については +1 を，奇置換に

ついては -1 を掛け，和をとることを意味する。もし，運動量 $\boldsymbol{p}_i$，スピン σ_i の状態を 2 つ以上の粒子が占めたとすると，反対称化した波動関数 $\varPhi$ はゼロとなる。これは Fermi 粒子を同じ状態に 2 個以上つめることができないという Pauli 原理を表している。

上述の Fermi 粒子の性質は粒子数表示を用いると，もっと簡単に表現される。Bose 粒子の (3.3) 式に対して，Fermi 粒子の消滅演算子 $a_{\boldsymbol{p}\sigma}$，生成演算子 $a^+_{\boldsymbol{p}\sigma}$ の交換関係は，

$$a_{\boldsymbol{p}\sigma}a^+_{\boldsymbol{p}'\sigma'} + a^+_{\boldsymbol{p}'\sigma'}a_{\boldsymbol{p}\sigma} = \delta_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'}\delta_{\sigma,\sigma'} \tag{9.2a}$$

$$a_{\boldsymbol{p}\sigma}a_{\boldsymbol{p}'\sigma'} + a_{\boldsymbol{p}'\sigma'}a_{\boldsymbol{p}\sigma} = 0 \tag{9.2b}$$

$$a^+_{\boldsymbol{p}\sigma}a^+_{\boldsymbol{p}'\sigma'} + a^+_{\boldsymbol{p}'\sigma'}a^+_{\boldsymbol{p}\sigma} = 0 \tag{9.2c}$$

となる。粒子数を表す演算子は Bose 粒子のときと同様に $\widehat{n}_{\boldsymbol{p}\sigma} = a^+_{\boldsymbol{p}\sigma}a_{\boldsymbol{p}\sigma}$ と定義する。(9.2c) で $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}'$，$\sigma = \sigma'$ とおくと $(a^+_{\boldsymbol{p}\sigma})^2 = 0$ となる。これは，同じ $\boldsymbol{p}, \sigma$ を持つ Fermi 粒子は 2 個以上生成できないという上述の Pauli 原理を表している。また，(9.2a) を用いれば，$(a^+_{\boldsymbol{p}\sigma}a_{\boldsymbol{p}\sigma})^2 = a^+_{\boldsymbol{p}\sigma}a_{\boldsymbol{p}\sigma}$ が得られる。したがって，演算子 $\widehat{n}_{\boldsymbol{p}}$ の固有値は 0 か 1 に限られることがわかる。

このような Pauli 原理に従う Fermi 粒子の基底状態は，エネルギーの低い状態から順次粒子を詰めていくことにより得られる。すなわち，自由粒子のエネルギーは，スピンによらずに $\varepsilon_{\boldsymbol{p}} = p^2/2m$ なので，基底状態の粒子数分布は，

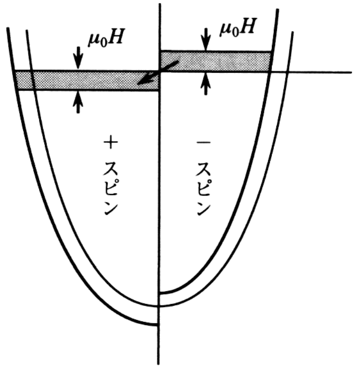
$$n^{(0)}_{\boldsymbol{p}\sigma} = n^{(0)}(\varepsilon_{\boldsymbol{p}}) = \begin{cases} 1 & (p \leq p_{\mathrm{F}}) \\ 0 & (p > p_{\mathrm{F}}) \end{cases} \tag{9.3}$$

すなわち，運動量空間の原点を中心として半径 p_{F} の球面 (Fermi 面とよばれる) 内部の状態にはすべて粒子が詰まり，外部の状態はすべてあいているという状態になる。p_{F} は Fermi 運動量，$\varepsilon_{\mathrm{F}} = p_{\mathrm{F}}^2/2m$ は Fermi エネルギー，また $v_{\mathrm{F}} = p_{\mathrm{F}}/m$ は Fermi 速度とよばれる。

(9.3) 式のような粒子数分布を持った Fermi 粒子系の状態は完全に Fermi 縮退した状態というが，この状態において系の粒子数 $N = \sum_{\boldsymbol{p}\sigma} n_{\boldsymbol{p}\sigma}$ は

$$N = \frac{2V}{(2\pi\hbar)^3}\int_0^{p_{\mathrm{F}}} 4\pi p^2 dp = \frac{V}{\pi^2\hbar^3}\frac{p_{\mathrm{F}}^3}{3} \tag{9.4}$$

と計算される。したがって，p_{F} および ε_{F} は，粒子数密度 $n = N/V$ と



9·1 図 磁場による縮退した Fermi 粒子系での変化 (スピン常磁性)。斜線の部分の粒子が − スピンから + スピンに移る。

$$p_{\mathrm{F}} = (3\pi^2)^{1/3} n^{1/3} \hbar \tag{9.5}$$

$$\varepsilon_{\mathrm{F}} = (3\pi^2)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m} n^{2/3} \tag{9.6}$$

のように関係している。

縮退した Fermi 粒子系は特異な性質を持っている。その性質をみるために弱い一様な外部磁場をかけた場合を考えてみる。強さ H_0 の磁場の中で磁場方向のスピンを持った粒子は $-\mu_0 H_0$ (μ_0 は粒子の持つ磁化の大きさ), 逆向き方向のスピンを持った粒子は $\mu_0 H_0$ だけエネルギーが変化する。その結果, (9.3) の粒子数分布は 9·1 図に示したように変化し, 系には磁化,

$$M = \mu_0 \sum_{\boldsymbol{p}} \{ n^{(0)}(\varepsilon_{\boldsymbol{p}} - \mu_0 H_0) - n^{(0)}(\varepsilon_{\boldsymbol{p}} + \mu_0 H_0) \} \tag{9.7}$$

が表れる。粒子数分布の変化は Fermi 面近くでのみ起っているので, Fermi 面近傍の量子状態が問題になる。エネルギーが ε と $\varepsilon + d\varepsilon$ にある状態の数は (9.4) 式の計算にあるように, 各々のスピンについて,

$$dN = \frac{V}{2\pi^2\hbar^3} p^2 \frac{dp}{d\varepsilon} d\varepsilon = \frac{V}{2\pi^2\hbar^3} mp d\varepsilon$$

である。したがって, 単位体積での Fermi 面上の各スピン当たりの状態密度は

$$N(0) = \frac{1}{V}\left.\frac{dN}{d\varepsilon}\right|_{p=p_{\mathrm{F}}} = \frac{1}{2\pi^2\hbar^3}mp_{\mathrm{F}} \tag{9.8}$$

となる。$N(0)$ を用いると (9.7) 式の磁化 M は簡単に計算されて $M = N(0)2\mu_0^2 H_0$，これより帯磁率 χ は

$$\chi = 2N(0)\mu_0^2 \tag{9.9}$$

となる。

有限温度では Fermi 球の内側の状態からエネルギーの高い外側の状態へ粒子が励起される。熱平衡状態での粒子数分布 $n_{\boldsymbol{p}\sigma}$ は，次のような Fermi 分布関数になる。

$$n_{\boldsymbol{p}\sigma} = \langle \widehat{n}_{\boldsymbol{p}\sigma} \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_{\boldsymbol{p}}-\mu)}+1} \tag{9.10}$$

ここで $\beta = 1/k_{\mathrm{B}}T$，$\mu$ は化学ポテンシャルである。(9.10) 式は $T \to 0$ では，$n_{\boldsymbol{p}\sigma}$ が $\varepsilon_p < \mu$ で 1，$\varepsilon_p > \mu$ で 0 の階段関数になり，$\mu = \varepsilon_{\mathrm{F}}$ とすれば，(9.3) 式に帰着する。また，$k_{\mathrm{B}}T$ が Fermi エネルギー ε_{F} より十分小さい温度では粒子数分布の階段関数との違いはわずかで，熱的に励起された空孔 (Fermi 面内の励起) および粒子 (Fermi 面外の励起) は，Fermi 面の近く $|\varepsilon_p - \mu| \lesssim k_{\mathrm{B}}T$ にのみ存在し，系は Fermi 縮退した状態にある。

Fermi 縮退している状態での系の単位体積当たりのエネルギー $E = \sum_{\boldsymbol{p}\sigma} \varepsilon_{\boldsymbol{p}\sigma} n_{\boldsymbol{p}\sigma}$ を計算してみよう。上に述べた議論から，熱的に励起された粒子の数は状態密度 $N(0)$ を用いて $N(0)k_{\mathrm{B}}T$ 程度，また励起エネルギーは $k_{\mathrm{B}}T$ 程度であるから，温度 T での全エネルギー $E(T)$ は $T=0$ の基底状態のエネルギー $E(0)$ から測って $E(T) - E(0) \sim N(0)(k_{\mathrm{B}}T)^2$ 程度増加すると見積もられる。(9.10) 式をつかって正しく計算すれば

$$E(T) = E(0) + \frac{\pi^2}{6}2N(0)(k_{\mathrm{B}}T)^2 \tag{9.11}$$

という表式が得られる。したがって，比熱は

$$C = \frac{\partial E}{\partial T} = \frac{\pi^2}{3}2N(0)k_{\mathrm{B}}^2 T \tag{9.12}$$

と T に比例することが導かれる†。

† 比熱に対する表式において通常，状態密度はスピンについての和をとったものを用いる。ここではそれが $2N(0)$ である。

9–2 Fermi 液体 [1),2)]

前節で述べた理想 Fermi 気体を出発点として相互作用をしている Fermi 系について考えよう。まず，Fermi 粒子どうしの相互作用が十分弱い場合には理想気体を第ゼロ近似として低次の摂動計算を行えばよい。しかし，相互作用が強くなるとともに摂動計算は困難となり，液体 ^{3}He のように強く相互作用をしている系では一見計算は不可能なようにみえる。このような液体 ^{3}He に適用できる現象論として Landau がすぐれた物理的考察から導入したのが Fermi 液体 (Fermi Liquid) という考え方である†。

強く相互作用をしている系としては液体 ^{4}He についてすでに述べた。超流動 ^{4}He において基底状態からあまり離れていない励起状態は，フォノンまたはロトンといった準粒子 (励起量子) を用いて記述できた。Fermi 液体でも基底状態からあまり離れていない励起状態を記述する準粒子という概念は成立する。粒子間に相互作用が働いていれば，理想気体の場合と違って一粒子状態はよい量子状態ではない。しかし，理想気体で成立した概念のいくつかは Fermi 液体系にも適用できる。いま，相互作用の強さがゼロの理想気体から現実の Fermi 液体まで，相互作用を少しずつ強くして到達したとする。もし，そのような仮想的過程の途中で相転移などの不連続な状態変化がないとすれば，出発点と到着点の二つの系の間には密接な関係が存在する。ある一つの粒子に注目して上述の過程を考えると粒子は相互作用が強くなるのにともないまわりの粒子の状態を少しずつ変化させるであろう。すなわち，理想気体での一粒子状態はまわりの変化をともなった着物を着た準粒子 (dressed particle) 状態になる。そのとき理想気体での一粒子状態と着物を着た準粒子状態の間には 1 対 1 の対応関係がつけられるということは大変重要である。相互作用が運動量とスピンを保存する相互作用であれば，Fermi 液体においても理想気体と同じように系の状態は運動量 $\boldsymbol{p}$，スピン σ で指定される準粒子の分布 $n_{\boldsymbol{p}\sigma}$ で記述できることになる。この結論はすでに述べたように，相互作用を変化させる過程で系が連続的に変化する場合にのみ有効で，途中で不連続性があると考えられる固体状態や超流動状態などには適用できない。このような仮定が成立する状態を

---

† Fermi 液体論は液体 ^{3}He だけでなく金属中の電子気体や核物質などにも適用されている。

正常 (nomal) Fermi 液体といい，通常 Fermi 液体といえばこの正常 Fermi 液体のことをいう。

理想 Fermi 気体で，基底状態の粒子数分布は (9.3) 式で与えられた。正常 Fermi 液体でも粒子数分布は同じように与えられ，Fermi 面が存在する。Fermi 運動量 p_{F} より小さい運動量を持った状態には準粒子がつまり，大きい運動量を持った状態は空席になっている。したがって，この場合も (9.5) 式が成立し，p_{F} は粒子数密度 n により，$p_{\mathrm{F}} = \hbar(3\pi^2 n)^{1/3}$ で与えられる。

次に，Fermi 面の外側に 1 個粒子を付け加えて，その様子をみてみよう。付け加えた粒子の運動量を $\boldsymbol{p}$ とすると相互作用のためこの準粒子のエネルギー $\varepsilon_{\boldsymbol{p}\sigma}$ は自由粒子の場合の $p^2/2m$ とは異なる。系は等方的であるためエネルギーは $|\boldsymbol{p}|$ の関数で，Fermi 面近くの粒子を考えれば $|\boldsymbol{p}| - p_{\mathrm{F}}$ のベキで展開でき，近似的に

$$\varepsilon_{\boldsymbol{p}\sigma} = \varepsilon_{\mathrm{F}} + v_{\mathrm{F}}(|\boldsymbol{p}| - p_{\mathrm{F}})$$
$$v_{\mathrm{F}} = \frac{p_{\mathrm{F}}}{m^*} \tag{9.13}$$

とかける。準粒子は着物をきて，はだかの質量 m は有効質量 m^* に置きかわる。したがって，(9.8) で与えられた単位体積，各スピン当たりの Fermi 面上での状態密度 $N(0)$ も

$$N(0) = \frac{1}{2\pi^2\hbar^3} m^* p_{\mathrm{F}} \tag{9.8$'$}$$

となる。

準粒子が相互作用をしているため問題になるのは，Fermi 面の外側に付け加えた準粒子が 1 個だけあるという状態は，エネルギーの固有状態でないということである。付け加えた粒子は Fermi 面の内側の粒子と衝突し，その粒子を Fermi 面の外側へ散乱し，準粒子と空孔をつくる。このように準粒子は有限の寿命を持つ。もし，寿命が相互作用を強くしていくとともにいくらでも短くなるのであれば，そのときは準粒子の概念が成立しなくなってしまう，しかし，幸いなことに Fermi 面近傍の準粒子に限れば，その寿命が十分長いことを示すことができる。

いま，Fermi 面外部のエネルギー ε_1 の準粒子が Fermi 面内部のエネルギー ε_2 の準粒子と衝突したとすれば，衝突後は Pauli 原理のため，1，2 の準粒子とも Fermi 面の内側へは遷移できず，外側の準粒子になる。そのエネルギーを $\varepsilon_3, \varepsilon_4$ とすると，

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_F, \quad \varepsilon_2 < \varepsilon_F, \quad \varepsilon_3 > \varepsilon_F, \quad \varepsilon_4 > \varepsilon_F \tag{9.14}$$

であり，またエネルギー保存則より

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon_3 + \varepsilon_4 \tag{9.15}$$

が成り立つ。

もし，準粒子 1 が Fermi 面上の状態 $\varepsilon_1 = \varepsilon_F$ であるとすると (9.14) より $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \varepsilon_F$ 以外，(9.15) の条件を満足させることができない。すなわち，準粒子 2，3，4 の取りうる量子状態はなくなり，衝突は起らないことになる。したがって，Fermi 面上の準粒子の寿命は $T = 0$ では無限に長い。次に，準粒子 1 が Fermi 面から少し離れたところにある場合を考える。この場合は，準粒子 2，3，4 の取りうる状態は Fermi 面の上下 $|\varepsilon_1 - \varepsilon_F|$ 程度のところにある。準粒子 2，3，4 のエネルギーについての積分は保存則 (9.15) により制限されるので，衝突の確率は $(\varepsilon_1 - \varepsilon_F)^3$ でなく，$(\varepsilon_1 - \varepsilon_F)^2$ に比例する。準粒子の寿命 τ は

$$\frac{1}{\tau} \propto (\varepsilon_1 - \varepsilon_F)^2 \tag{9.16}$$

である†。同様の議論が Fermi 面内部に 1 個空孔をつくったときにも適用でき，空孔の寿命も Fermi 面に近づくにしたがって (9.16) のように長くなる。

上述の議論から Fermi 液体論は温度が十分低いときや，外場が十分弱いときなど励起された準粒子が Fermi 面の近傍にのみ存在する場合に，有効であることがわかった。このとき，励起状態は準粒子の分布 $n_{\boldsymbol{p}\sigma}$ の基底状態の分布 $n_{\boldsymbol{p}\sigma}^{(0)}$ からのずれ

$$\delta n_{\boldsymbol{p}\sigma} = n_{\boldsymbol{p}\sigma} - n_{\boldsymbol{p}\sigma}^{(0)} \tag{9.17}$$

を用いて記述される。

さて，$\delta n_{\boldsymbol{p}\sigma}$ で表される励起状態での準粒子のエネルギーを考えよう。準粒子ははだかの ^{3}He 原子が相互作用により着物をきた粒子であり，着物の状態はまわりの粒子の状態により変化する。したがって，他に準粒子の励起があれば，当然その影響をうける。すなわち，準粒子どうしも相互作用する。準粒子間の相互作用は励起状態の系のエネルギー E (単位体積) を $\delta n_{\boldsymbol{p}\sigma}$ で 2 次まで Taylor 展開すれば取り入れることができる。

---

† 温度 T では理想気体のときと同じように Fermi 面近傍の $k_B T$ 程度のところに準粒子が励起されているため，その準粒子との衝突により寿命は $1/\tau \propto T^2$ になる。

$$E = E_0 + \frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{p}\sigma} \varepsilon_{\boldsymbol{p}\sigma}\delta n_{\boldsymbol{p}\sigma} + \frac{1}{2}\frac{1}{V^2}\sum_{\boldsymbol{p}\sigma\boldsymbol{p}'\sigma'} f_{\boldsymbol{p}\sigma,\boldsymbol{p}'\sigma'}\delta n_{\boldsymbol{p}\sigma}\delta n_{\boldsymbol{p}'\sigma'} \tag{9.18}$$

ここで，E_0 は基底状態のエネルギー，$\varepsilon_{\boldsymbol{p}\sigma}$ は $\boldsymbol{p},\sigma$ の状態に 1 個だけ準粒子が励起されたときの系のエネルギー変化，また $f_{\boldsymbol{p}\sigma,\boldsymbol{p}'\sigma'}$ は $\boldsymbol{p},\sigma$ と $\boldsymbol{p}',\sigma'$ の状態に準粒子があるとき付け加わるエネルギーで相互作用エネルギーを表すと考えられる。したがって，他に励起された準粒子があるとき準粒子のエネルギーは

$$\widetilde{\varepsilon}_{\boldsymbol{p}\sigma} = \frac{\delta(EV)}{\delta n_{\boldsymbol{p}\sigma}} = \varepsilon_{\boldsymbol{p}\sigma} + \frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{p}'\sigma'} f_{\boldsymbol{p}\sigma,\boldsymbol{p}'\sigma'}\delta n_{\boldsymbol{p}'\sigma'} \tag{9.19}$$

のようになる。

準粒子間の有効相互作用 $f_{\boldsymbol{p}\sigma,\boldsymbol{p}'\sigma'}$ は Landau パラメーターとよばれる。系が時間反転と空間反転に対して不変な場合には

$$f_{\boldsymbol{p}\sigma,\boldsymbol{p}'\sigma'} = f_{-\boldsymbol{p}-\sigma,-\boldsymbol{p}'-\sigma'} = f_{\boldsymbol{p}-\sigma,\boldsymbol{p}'-\sigma'} \tag{9.20}$$

が成り立つ。したがって，$f_{\boldsymbol{p}\sigma,\boldsymbol{p}'\sigma'}$ のスピン変数について独立な成分は 2 つで，それを次のように取ることにする。

$$\begin{aligned} f^s_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'} &= \frac{1}{2}(f_{\boldsymbol{p}\uparrow,\boldsymbol{p}'\uparrow} + f_{\boldsymbol{p}\uparrow,\boldsymbol{p}'\downarrow}) \\ f^a_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'} &= \frac{1}{2}(f_{\boldsymbol{p}\uparrow,\boldsymbol{p}'\uparrow} - f_{\boldsymbol{p}\uparrow,\boldsymbol{p}'\downarrow}) \end{aligned} \tag{9.21}$$

$f^s_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'}$ と $f^a_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'}$ により (9.19) 式は，

$$\begin{aligned} \widetilde{\varepsilon}_{\boldsymbol{p}\sigma} = \varepsilon_{\boldsymbol{p}\sigma} &+ \frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{p}} f^s_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'}(\delta n_{\boldsymbol{p}'\uparrow} + \delta n_{\boldsymbol{p}'\downarrow}) \\ &+ \frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{p}} f^a_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'}(\delta n_{\boldsymbol{p}'\uparrow} - \delta n_{\boldsymbol{p}'\downarrow}) \end{aligned} \tag{9.22}$$

と書きかえられる。

さらに，系が等方的な場合には，Fermi 面近傍でのみ準粒子は定義されているので，$|\boldsymbol{p}| = |\boldsymbol{p}'| = p_{\mathrm{F}}$，また $f^{s(a)}_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'}$ は $\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'$ 間の角度 θ のみの関数とみなしてよい。$f^{s(a)}_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'}$ を部分波に展開して

$$f^{s(a)}_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'} = \sum_l f^{s(a)}_l P_l(\cos\theta) \tag{9.23}$$

と書くことにする。ここで，$P_l(\cos\theta)$ は Legendre の多項式である。$f^{s(a)}_l$ は，(エネルギー) × Vの次元を持っているので状態密度 $2N(0)$ をかけて無次元化したパラメーター

$$F_l^{s(a)} = 2N(0) f_l^{s(a)} \tag{9.24}$$

を導入しておくと便利である。次に Fermi 液体論を用いたいくつかの物理量の計算を行う。

帯 磁 率　理想気体の場合と同じように $T=0\mathrm{K}$ での帯磁率の計算からはじめよう。準粒子の持つ磁化の大きさを μ_0 とすると，強さ H_0 の外部磁場の中で磁場方向のスピンを持った準粒子のエネルギーは，(9.22) より

$$\widetilde{\varepsilon}_{\boldsymbol{p}\uparrow} = \varepsilon_{\boldsymbol{p}} - \mu_0 H_0 + \frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{p}'} f^a_{\boldsymbol{p}\boldsymbol{p}'}(\delta n_{\boldsymbol{p}'\uparrow} - \delta n_{\boldsymbol{p}'\downarrow}) \tag{9.25}$$

となる。ここで $\delta n_{\boldsymbol{p}\sigma}$ は外場がかかることによる分布の変化で $\delta n_{\boldsymbol{p}\uparrow}+\delta n_{\boldsymbol{p}\downarrow} = 0$ であり，後でつじつまを合わせて決める。$\delta n_{\boldsymbol{p}\sigma}$ は等方的と考えられるので

$$\delta\widetilde{\varepsilon}_{\boldsymbol{p}\uparrow} = \widetilde{\varepsilon}_{\boldsymbol{p}\uparrow} - \varepsilon_{\boldsymbol{p}} = -\delta\widetilde{\varepsilon}_{\boldsymbol{p}\downarrow} = -\mu_0 H_0 + f_0^a \frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{p}'}(\delta n_{\boldsymbol{p}'\uparrow} - \delta n_{\boldsymbol{p}'\downarrow}) \tag{9.26}$$

である。(9.26) 式は外場がかかることにより変化した分布が

$$H_m = -\frac{1}{\mu_0} f_0^a \frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{p}'}(\delta n_{\boldsymbol{p}'\uparrow} - \delta n_{\boldsymbol{p}'\downarrow}) = -\frac{2}{\mu_0} f_0^a \delta n_\uparrow \tag{9.27}$$

の分子場を生じ，それがエネルギーの変化に付け加わっていることを表している。ここで，$\delta n_\uparrow = V^{-1}\sum_{\boldsymbol{p}'}\delta n_{\boldsymbol{p}'\uparrow} = -\delta n_\downarrow$ である。分布の変化は理想気体の場合の 9·1 図で示したものと同様に与えられる。ただし，磁場には分子場 H_m が加わっているので

$$\delta n_\uparrow = N(0)\mu_0\left(H_0 - \frac{2}{\mu_0} f_0^a \delta n_\uparrow\right)$$

となる。これより (9.24) を考慮して

$$\delta n_\uparrow = \frac{N(0)\mu_0 H_0}{1+F_0^a} \tag{9.28}$$

と求まる。したがって，帯磁率 χ は

$$\chi = \frac{2N(0)\mu_0^2}{1+F_0^a} \tag{9.29}$$

となる。(9.29) は $F_0^a = 0$ とすれば，理想気体での表式 (9.9) に一致する。

圧 縮 率　同じようにして $T=0\mathrm{K}$ での圧縮率 κ を求めることができる。$T=0\mathrm{K}$ での圧力 P は基底状態の単位体積当たりのエネルギー E_0 を用いて，

$$P = \frac{\partial(VE_0)}{\partial V}$$

と与えられ，また圧縮率 κ は

$$\frac{1}{\kappa} = -V\frac{\partial P}{\partial V}$$

である。単位体積当たりのエネルギーは密度 $n = N/V$ の関数と考えられるので

$$E_0 = f(n)$$

とおけば，

$$\frac{1}{\kappa} = n^2 f''(n)$$

となる。さらに，化学ポテンシャルは $\mu = \partial(VE_0)/\partial N = f'(n)$ と書けるので，

$$\kappa = \frac{1}{n^2}\left(\frac{\partial n}{\partial \mu}\right)_V \tag{9.30}$$

が得られる。

(9.30) 式をみると圧縮率と帯磁率の類似がはっきりする。帯磁率の計算ではスピンの向きによって符号の異なった外場ポテンシャル $\pm\mu_0 H_0$ に対する $\delta n_\uparrow - \delta n_\downarrow$ の応答をみているのに対して，圧縮率の計算ではスピンの向きに関係なく，化学ポテンシャルを同じ $\delta\mu$ だけ変化させたときの粒子数の応答 $\delta n_\uparrow + \delta n_\downarrow$ をみている。圧縮率も帯磁率と同様に計算され

$$\kappa = \frac{2N(0)}{n^2}\frac{1}{1+F_0^s} \tag{9.31}$$

となり，対称 Landau パラメーター F_0^s が寄与する。なお，圧縮率から通常の音波の音速 $c_1 = (mn\kappa)^{-1/2}$ を求めると

$$c_1 = \frac{p_{\mathrm{F}}}{m}\sqrt{\frac{m}{3m^*}(1+F_0^s)} \tag{9.32}$$

となる。

比　熱　次に比熱の計算を行う。温度 T での準粒子の平衡分布が Fermi 分布関数

$$n_{p\sigma}^{(0)}(T) = \frac{1}{e^{\beta(\widetilde{\epsilon_p}-\mu)}+1} \tag{9.33}$$

になることは，準粒子と理想気体での粒子が 1 対 1 対応していることから

容易に推測される。ただし，(9.33) 式は，理想気体の場合と違って，エネルギー$\widetilde{\varepsilon}_{\boldsymbol{p}}$ が (9.19) 式で与えられ，分布の汎関数になっているという事情に注意しなければならない。しかし，$T\to 0$ で $\delta n_{\boldsymbol{p}\sigma}\to 0$ であることを考慮すれば，比熱の計算において相互作用の項は T の高次の補正を与えることがわかる。したがって，理想気体における (9.12) 式で m を m^* で置き換えた表式

$$C=\frac{\pi^2}{3}2N(0)k_{\mathrm{B}}^2T=\frac{m^*p_{\mathrm{F}}}{3\hbar^3}k_{\mathrm{B}}^2T \tag{9.34}$$

が得られる。

Fermi 液体の動的性質　Landau の Fermi 液体理論は，平衡状態の性質だけでなく動的な現象を取り扱うときにも有効である。すでに述べた平衡状態での理論を時間的・空間的に変化する場合に拡張する。温度 T では，平衡状態で Fermi 面の近傍の幅 $k_{\mathrm{B}}T$ 程度の領域に準粒子が励起されている。この状態が空間的にも時間的にもゆるやかな変化をするとして，場所 $\boldsymbol{x}$，時間 t での局所分布 $n_{\boldsymbol{p}\sigma}(\boldsymbol{x},t)$ を定義する。空間的変化を特徴づける長さのスケールを $1/k$，時間的変化を特徴づける時間のスケールを $1/\omega$ とすると，条件

$$\hbar kv_{\mathrm{F}}\ll k_{\mathrm{B}}T,\quad \hbar\omega\ll k_{\mathrm{B}}T \tag{9.35}$$

が満たされるときには，$n_{\boldsymbol{p}\sigma}(\boldsymbol{x},t)$ が定義できると考えてよい。この $n_{\boldsymbol{p}\sigma}(\boldsymbol{x},t)$ は Boltzmann 方程式

$$\frac{\partial n_{\boldsymbol{p}\sigma}}{\partial t}+\nabla_{\boldsymbol{p}}\widetilde{\varepsilon}_{\boldsymbol{p}\sigma}\nabla_{\boldsymbol{x}}n_{\boldsymbol{p}\sigma}-\nabla_{\boldsymbol{x}}\widetilde{\varepsilon}_{\boldsymbol{p}\sigma}\nabla_{\boldsymbol{p}}n_{\boldsymbol{p}\sigma}=I(n_{\boldsymbol{p}\sigma}) \tag{9.36}$$

に従う。ここで $\widetilde{\varepsilon}_{\boldsymbol{p}\sigma}$ は局所的に考えた準粒子のエネルギー

$$\widetilde{\varepsilon}_{\boldsymbol{p}\sigma}(\boldsymbol{x},t)=\varepsilon_{\boldsymbol{p}}+\sum_{\boldsymbol{p}'\sigma'}f_{\boldsymbol{p}\sigma,\boldsymbol{p}'\sigma'}\delta n_{\boldsymbol{p}'\sigma'}(\boldsymbol{x},t) \tag{9.37}$$

であり，$I(n_{\boldsymbol{p}\sigma})$ は衝突項である。準粒子間の相互作用は $\widetilde{\varepsilon}_{\boldsymbol{p}\sigma}$ に $f_{\boldsymbol{p}\sigma,\boldsymbol{p}'\sigma'}$ として取り入れられた分子場の効果のほかに，準粒子間の衝突もひきおこす。その効果は $I(n_{\boldsymbol{p}\sigma})$ として取り入れられている。

分布関数の平衡状態の分布 (9.33) からの変化は小さいとすれば $\delta n_{\boldsymbol{p}\sigma}(\boldsymbol{x},t)=n_{\boldsymbol{p}\sigma}(\boldsymbol{x},t)-n_{\boldsymbol{p}\sigma}^{(0)}(T)$ について 1 次までとり，(9.36) 式は

$$\frac{\partial \delta n_{\boldsymbol{p}\sigma}}{\partial t} + \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{p}} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} \delta n_{\boldsymbol{p}\sigma} - \frac{\partial n^{(0)}_{\boldsymbol{p}\sigma}}{\partial \varepsilon_{\boldsymbol{p}}} \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{p}} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} \sum_{\boldsymbol{p}'\sigma'} f_{\boldsymbol{p}\sigma,\boldsymbol{p}'\sigma'} \delta n_{\boldsymbol{p}'\sigma'} = I(\delta n_{\boldsymbol{p}\sigma}) \tag{9.38}$$

となる。ここで $n^{(0)}_{\boldsymbol{p}\sigma} = n^{(0)}_{\boldsymbol{p}\sigma}(T)$ また $\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{p}} = \nabla_{\boldsymbol{p}} \varepsilon_{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{p}/m^*$ である。(9.38) 式の両辺で $\boldsymbol{p}$ と σ についての和をとると，衝突により準粒子の数は変わらないことに注意して

$$\frac{\partial \delta n(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} + \nabla_{\boldsymbol{x}} \sum_{\boldsymbol{p}\sigma} \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{p}} \left(\delta n_{\boldsymbol{p}\sigma} - \frac{\partial n^{(0)}_{\boldsymbol{p}\sigma}}{\partial \varepsilon_{\boldsymbol{p}}} \sum_{\boldsymbol{p}'\sigma'} f_{\boldsymbol{p}\sigma,\boldsymbol{p}'\sigma'} \delta n_{\boldsymbol{p}'\sigma'} \right) = 0 \tag{9.39}$$

を得る。ここで $\delta n(\boldsymbol{x},t) = \sum_{\boldsymbol{p}\sigma} \delta n_{\boldsymbol{p}\sigma}$ は準粒子密度の変化で (9.39) 式は連続の方程式を表していると考えられる。これから準粒子の流れの密度 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t)$ に対する表式

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t) = \sum_{\boldsymbol{p}\sigma} \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{p}} \left(\delta n_{\boldsymbol{p}\sigma} - \frac{\partial n^{(0)}_{\boldsymbol{p}\sigma}}{\partial \varepsilon_{\boldsymbol{p}}} \sum_{\boldsymbol{p}'\sigma'} f_{\boldsymbol{p}\sigma,\boldsymbol{p}'\sigma'} \delta n_{\boldsymbol{p}'\sigma'} \right) \tag{9.40}$$

を得る。ここで準粒子とはだかの粒子との間に 1 対 1 対応があることを考慮すれば準粒子の流れの密度 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t)$ ははだかの粒子の流れの密度でもある。したがって，$m\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t)$ は質量の流れ密度であり，それはまた単位体積当たりの運動量に等しい。このことから

$$\sum_{\boldsymbol{p}\sigma} \boldsymbol{p} \delta n_{\boldsymbol{p}\sigma} = m \sum_{\boldsymbol{p}\sigma} \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{p}} \left(\delta n_{\boldsymbol{p}\sigma} - \frac{\partial n^{(0)}_{\boldsymbol{p}\sigma}}{\partial \varepsilon_{\boldsymbol{p}}} \sum_{\boldsymbol{p}'\sigma'} f_{\boldsymbol{p}\sigma,\boldsymbol{p}'\sigma'} \delta n_{\boldsymbol{p}'\sigma'} \right) \tag{9.41}$$

が成立する。(9.41) 式右辺第 2 項において和 $\boldsymbol{p}\sigma$ と $\boldsymbol{p}'\sigma'$ を入れかえることにより

$$\frac{\boldsymbol{p}}{m} = \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{p}} - \sum_{\boldsymbol{p}'\sigma'} f_{\boldsymbol{p}\sigma,\boldsymbol{p}'\sigma'} \frac{\partial n^{(0)}_{\boldsymbol{p}'\sigma}}{\partial \varepsilon_{\boldsymbol{p}'}} \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{p}'} \tag{9.42}$$

を得る。(9.42) 式から有効質量 m^* に対する表式が得られる。$\partial n^{(0)}_{\boldsymbol{p}'\sigma}/\partial \varepsilon_{\boldsymbol{p}'} = -\delta(\varepsilon_{\boldsymbol{p}'} - \varepsilon_{\mathrm{F}})$ と近似して，その表式は

$$\frac{m^*}{m} = 1 + \frac{F_1^s}{3} \tag{9.43}$$

となり，有効質量は Landau パラメーター F_1^s と関係している。

ゼロ音波　Landau の Fermi 液体理論のめざましい成果の一つはゼロ音波の存在を理論的に予言したことである。第一音波とよばれる通常の音

波は高温で準粒子間の衝突が頻繁に起き，その衝突時間 τ に比べて振動周期 $1/\omega$ がはるかに長い ($\omega\tau \ll 1$) 場合に伝播する音波である。この場合には，頻繁な衝突によりつねに局所的な熱平衡状態が成立し，(9.38) 式に従う運動は流体力学の運動方程式で記述されるようになる†。このとき音波は圧縮率から決まる音速 (9.32) で伝播する。これに対して，低温で準粒子間の衝突時間が長くなり，$\omega\tau \gg 1$ が成り立つ場合には，方程式 (9.38) で衝突項 $I(\delta n_{\boldsymbol{p}\sigma})$ が無視できる。このときの運動を $\delta n_{\boldsymbol{p}\sigma} \propto \exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - i\omega t)$ とおいて調べてみよう。(9.38) 式は

$$(\omega - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{p}})\delta n_{\boldsymbol{p}\sigma} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{p}}\frac{\partial n^{(0)}_{\boldsymbol{p}\sigma}}{\partial\varepsilon_{\boldsymbol{p}}}\sum_{\boldsymbol{p}'\sigma'} f_{\boldsymbol{p}\sigma,\boldsymbol{p}'\sigma'}\delta n_{\boldsymbol{p}'\sigma'} \tag{9.44}$$

となる。(9.44) 式の右辺は$\partial n^{(0)}_{\boldsymbol{p}\sigma}/\partial\varepsilon_{\boldsymbol{p}}$ に比例するので $\delta n_{\boldsymbol{p}\sigma}$ は Fermi 面の上でのみ値をもつ量である。スピンによらない振動だけを考えるとし，また $\boldsymbol{k}$ 方向から測った球座標の角度 (θ, φ) で方向を指定すると

$$\delta n_{\boldsymbol{p}\sigma} = \frac{\partial n^{(0)}_{\boldsymbol{p}\sigma}}{\partial\varepsilon_{\boldsymbol{p}}}u(\theta,\varphi) \tag{9.45}$$

と表せる。(9.45) を (9.44) に代入し，Landau パラメーターは F^s_0 と F^s_1 だけがゼロでないという簡単なモデルをとって計算すると，

$$(\lambda - \cos\theta)u(\theta,\varphi) = \cos\theta\int\frac{d\Omega'_p}{4\pi}(F^s_0 + F^s_1\cos\theta_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'})u(\theta',\varphi') \tag{9.46}$$

となる。ただし $\lambda = \omega/(v_{\mathrm{F}}k)$，$\theta_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'}$ は $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{p}'$ の間の角度である。φ によらない縦波の解を求めると

$$u(\theta) = \frac{\cos\theta}{\lambda - \cos\theta}F^s_0\langle u(\theta)\rangle + \frac{\cos^2\theta}{\lambda-\cos\theta}F^s_1\langle u(\theta)\cos\theta\rangle \tag{9.47}$$

ここで $\langle f(\theta)\rangle = (1/2)\int d(\cos\theta)f(\theta)$ を表す。

(9.47) 式から $\langle u(\theta)\rangle$ と $\langle u(\theta)\cos\theta\rangle$ に対する連立方程式が導かれ，その固有値 λ は，

$$\frac{\lambda}{2}\ln\frac{\lambda+1}{\lambda-1} = 1 + \left(F^s_0 + \lambda^2\frac{F^s_1}{1+F^s_1/3}\right)^{-1} \tag{9.48}$$

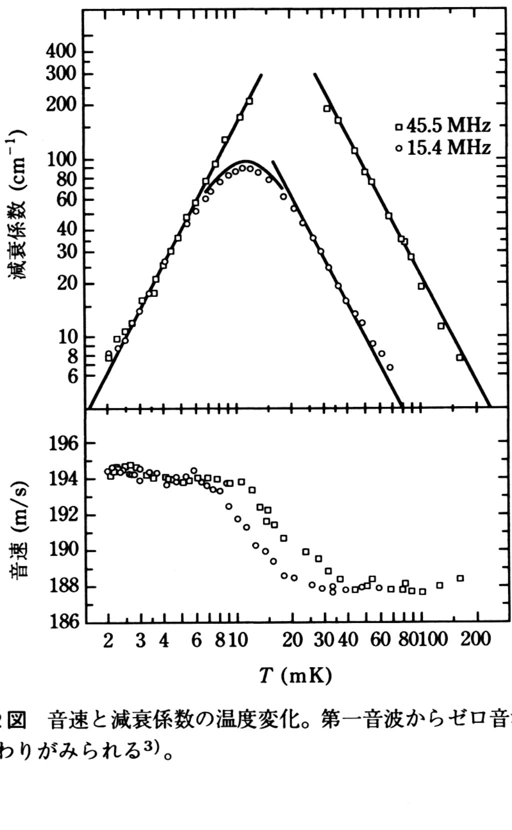
から求まる。表 9·1 に実験から決めた液体 ^{3}He の Fermi 液体パラメーターを示した。有効質量，音速と Fermi 速度の比をみれば準粒子間の相互作用は大変重要であり，準粒子間の相関は非常に強いことがわかる。そのなか

† 5 章で述べた ^{4}He の第一音波がこれに対応する。

表 9·1

圧力 (bar)	0	27
m^*/m	2.80	5.26
F_0^s	9.30	69.43
F_1^s	5.39	12.79
F_0^a	−0.695	−0.755
p_F (10^{-20}g·cm/s)	8.31	9.23
v_F (cm/s)	5.93×10^3	3.50×10^3
c_1 (cm/s)	1.829×10^4	3.893×10^4
c_0 (cm/s)	$1.936\times10^{4\dagger)}$	3.895×10^4

†) この値のみ 0.28bar での測定値である。



9·2 図 音速と減衰係数の温度変化。第一音波からゼロ音波への移り変わりがみられる[3]。

で F_0^s は特に大きく，圧力をかけるとさらに大きな値になる。これは，液体 ^{3}He が理想気体に比べて圧縮されにくいことを意味し，^{3}He 原子間に剛体球のような短距離で働く強い斥力が存在することから説明できる。また，F_0^a が負の値をとることも液体 ^{3}He の特徴の一つで，スピンが互いに平行になるような力が働いていることを意味する。この性質は超流動状態での性質を説明するとき重要になる (11 章参照)。

9·2 図に液体 ^{3}He の音波の減衰と音速の低温での実験結果を示す[3)]。減衰係数は (9.44) では無視した衝突項 $I(\delta n_{p\sigma})$ を考慮すれば計算できる。それは実線で示したように高温 $\omega\tau \ll 1$ の流体力学的領域から一度山をつくって，低温 $\omega\tau \gg 1$ のゼロ音波の領域に移っていくことが知られている。それにともなって，音速も第一音波の音速からゼロ音波の音速へと変化する。ゼロ音波の音速 c_0 は $F_0^s \gg 1$ であるとすると (9.48) より $\lambda^2 \gg 1$ となり

$$\lambda^2 = \frac{c_0^2}{v_{\mathrm{F}}^2} = \frac{1}{3}\left(F_0^s + \frac{9}{5}\right)\left(\frac{F_1^s}{3} + 1\right) \tag{9.49}$$

と求まる。(9.49) 式と第一音波の表式 (9.32) を組合せると

$$\frac{c_0 - c_1}{c_1} = \frac{2}{5}\frac{1}{1 + F_0^s} \tag{9.50}$$

となり，F_0^sが大きくなると音速の変化は小さくなる。

10. Fermi粒子対凝縮

すでに述べたように液体 ^{3}He も 1~2mK という超低温で超流動状態へ転移する。この ^{3}He 超流動状態は金属中の電子の超伝導状態と同じように，Fermi 粒子 2 個が対をつくると同時にその Bose 粒子的性質を持つ対が凝縮した状態であると理解されている。この章では最初に Fermi 粒子間に引力が働く場合には前章で述べた正常 Fermi 流体の基底状態は対の形成に対して不安定であるという Cooper の理論を紹介する。次に超流動 ^{3}He の対凝縮状態に比べて簡単な通常金属の超伝導状態，一重項 S 波の対凝縮状態について議論する。

10–1 Cooper 対形成

Fermi 統計にしたがう液体 ^{3}He が液体 ^{4}He と同じようにして超流動転移を起こすとは考えられない。しかし，2 個の Fermi 粒子が粒子対をつくり，その粒子対が重心運動に関して同じ量子状態を占めるということは起こる。このような Fermi 粒子対の凝縮が金属の超伝導状態で実際に起こっていることを示したのが有名な BCS 理論 (J.Bardeen，L.N.Cooper，J.R.Schrieffer) である[1)]。BCS 理論によれば，金属内の電子はフォノンを媒介にした引力により，反対向きの運動量と反対向きのスピンをもった電子が対 (Cooper 対とよばれる) を形成し，さらにその電子対が凝縮して $\langle a_{\uparrow \boldsymbol{p}} a_{-\boldsymbol{p}\downarrow} \rangle$ がゼロでないという状態になる。液体 ^{4}He の超流動凝縮相を特徴づけた秩序変数は (3.19) 式の $\Psi(\boldsymbol{r}) = \langle \psi(\boldsymbol{r}) \rangle$ で与えられたが，超伝導状態では

$$\Psi(\boldsymbol{r}) = \langle \psi_\uparrow(\boldsymbol{r})\psi_\downarrow(\boldsymbol{r})\rangle$$
$$\Psi^*(\boldsymbol{r}) = \langle \psi_\downarrow^*(\boldsymbol{r})\psi_\uparrow^*(\boldsymbol{r})\rangle \tag{10.1}$$

となる。

液体 ^{3}He の超流動も金属中の電子の超伝導と同じように ^{3}He 原子が対をつくり凝縮することで起こる。ただし，BCS 理論が取り扱った通常金属での電子対は角運動量を持たない S 波の対であったが，^{3}He の粒子対は原子間の相互作用が (1.1) 式で与えられるような短距離で強い斥力，長距離で引力という形をしているため，対を形成する原子どうしがあまり近づかない有限の角運動量 (P 波) を持った状態になっている。また，最近話題になっている重い電子系の超伝導状態は P 波または D 波の超伝導ではないかといわれているし，高温超伝導でも D 波の超伝導である可能性が指摘されている。

対間に働く引力によりどのタイプの粒子対が凝縮し，その結果どのような超伝導や超流動が出現するかという問題を BCS 理論で使われた模型を有限の角運動量を持った粒子対の場合へと拡張して考えてみよう。現実の系ではもちろんこの模型がそのまま適用できないことが多いが，定性的にみて重要な物理の多くはこの簡単な模型を用いた議論の中に含まれている。

Cooper 対不安定性[2)]　Cooper は，粒子間に引力が働く場合には引力がどんなに弱くても Fermi 面まで粒子がきっちりつまった正常 Fermi 液体の状態は粒子対の形成に対して不安定であるということを示した。Cooper の考えた問題は Fermi 面の外側に 2 個の粒子を付け加え，相互作用は付け加えた粒子の間にのみ働くとしたとき，どのようなことが起こるかという問題である。相互作用のポテンシャルを $V(\boldsymbol{r})$ とすると付け加えた 2 粒子に対する Schrödinger 方程式は

$$-\frac{\hbar^2}{2m}(\nabla_1^2 + \nabla_2^2)\Psi(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\sigma_1,\sigma_2) + V(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)\Psi(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\sigma_1,\sigma_2)$$
$$= (E + 2\varepsilon_{\mathrm{F}})\Psi(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\sigma_1,\sigma_2) \tag{10.2}$$

となる。ここで E は $2\varepsilon_{\mathrm{F}}$ から測った固有状態のエネルギーで，もし $E<0$ の解があれば，束縛状態が存在することを意味する。$V(\boldsymbol{r})$ としてスピンに関係しない相互作用を仮定しているので，固有状態の波動関数は $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$ の関数，$\varphi(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)$ とスピンの関数 $\chi(\sigma_1,\sigma_2)$ の積でかける。また，重心座標の運動量はゼロの状態を考えるとすると $\varphi(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)$ は相対座標のみの関数で

$$\Psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \sigma_1, \sigma_2) = \varphi(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)\chi(\sigma_1, \sigma_2) \tag{10.3}$$

となる。粒子の入れ換えに対して Ψ は反対称であるため，もし，$\varphi(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)$ が $\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$ の偶関数であれば，$\chi(\sigma_1, \sigma_2)$ は σ_1, σ_2 の交換に対して奇である。すなわち全スピン角運動量 $S = 0$ の一重項状態

$$\chi(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) \tag{10.4}$$

である。ここで，$|\uparrow\downarrow\rangle$ は $\sigma_1 = \uparrow, \sigma_2 = \downarrow$，$|\downarrow\uparrow\rangle$ は $\sigma_1 = \downarrow, \sigma_2 = \uparrow$ (以下同様に表す) を意味する。また，もし $\varphi(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)$ が $\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$ の奇関数であれば，$\chi(\sigma_1, \sigma_2)$ は σ_1, σ_2 の交換に対して偶，すなわち $S = 1$ の三重項状態

$$\chi(\sigma_1, \sigma_2) = \begin{cases} |\uparrow\uparrow\rangle & : \ S_z = 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) & : \ S_z = 0 \\ |\downarrow\downarrow\rangle & : \ S_z = -1 \end{cases} \tag{10.5}$$

となる。

固有エネルギー E は

$$\left[-\frac{\hbar^2}{m}\nabla^2 + V(\boldsymbol{r})\right]\varphi(\boldsymbol{r}) = (E + 2\varepsilon_{\mathrm{F}})\varphi(\boldsymbol{r}) \tag{10.6}$$

から求められる。Fourier 変換

$$\begin{aligned} \varphi(\boldsymbol{r}) &= \sum_{\boldsymbol{p}} \varphi_{\boldsymbol{p}} e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}/\hbar} \\ V_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'} &= \int d^3 r e^{-i(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\boldsymbol{r}/\hbar} V(\boldsymbol{r}) \end{aligned} \tag{10.7}$$

を導入すると，(10.6) 式は，

$$\begin{aligned} (2\xi_{\boldsymbol{p}} - E)\varphi_{\boldsymbol{p}} &= -\sum_{|\boldsymbol{p}'| > p_{\mathrm{F}}} V_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'}\varphi_{\boldsymbol{p}'} \\ \xi_p &= \frac{p^2}{2m} - \varepsilon_{\mathrm{F}} \end{aligned} \tag{10.8}$$

と書き換えられる。等方的な場合には $V_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'}$ は $|\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}'|^2 = p^2 + p'^2 - 2pp'\cos\theta$ のみの関数である。したがって

$$V_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'} = \sum_l (2l+1) V_l(p, p') P_l(\cos\theta) \tag{10.9}$$

と Legendre の多項式を用いて展開し，$\varphi_{\boldsymbol{p}}$ も，

$$\varphi_{\boldsymbol{p}} = \sum_{l,m} \varphi_l(p) Y_{l,m}(\widehat{\boldsymbol{p}}) \tag{10.10}$$

のように $\boldsymbol{p}$ 方向の単位ベクトル $\widehat{\boldsymbol{p}}$ についての球面調和関数 $Y_{l,m}(\widehat{\boldsymbol{p}})$ を用いて展開すると，$\varphi_l(p)$ $(p > p_{\rm F})$ に対する方程式

$$(2\xi_p - E)\varphi_l(p) = -\frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int_{p_{\rm F}}^{\infty} 4\pi p'^2 dp' V_l(p,p')\varphi_l(p') \tag{10.11}$$

を得る。

BCS 理論にならって相互作用 $V_l(p,p')$ について次のような簡単に形を仮定する。

$$\begin{aligned} V_l(p,p') &= -g_l \ : \ p_{\rm F} - \Delta p \le p, \ \ p' \le p_{\rm F} + \Delta p \\ V_l(p,p') &= 0 \quad\ \ : \ \text{上記以外の場合} \end{aligned} \tag{10.12}$$

さらに，$\Delta p \ll p_{\rm F}$ とすれば，(10.11) での運動量積分を状態密度 $N(0)$ を用いて Fermi 面近傍のエネルギー積分におきかえることができる。

$$(2\xi_p - E)\varphi_l(p) = N(0) g_l \int_0^{\varepsilon_{\rm c}} \varphi_l(p') d\xi_{p'} \tag{10.13}$$

ただし

$$\varepsilon_{\rm c} = \varepsilon(p_{\rm F} + \Delta p) - \varepsilon_{\rm F} = v_{\rm F} \Delta p$$

である。

(10.13) より固有関数は

$$\varphi_l = \frac{C}{2\xi_p - E} \tag{10.14}$$

(C は定数) となり，固有値は

$$1 = N(0) g_l \int_0^{\varepsilon_{\rm c}} \frac{d\xi_{p'}}{2\xi_{p'} - E} = \frac{1}{2} N(0) g_l \ln\left(\frac{2\varepsilon_{\rm c} - E}{-E}\right) \tag{10.15}$$

から求められる。通常の二体問題とちがって，他の電子がつくる Fermi 面が存在するため $g_l > 0$ (引力) であれば必ず $E < 0$ の束縛状態の解が存在する。束縛エネルギーはこの模型が有効であると考えられる弱結合 $N(0)g_l \ll 1$ の場合には

$$E = -2\varepsilon_{\rm c} e^{-\frac{2}{N(0)g_l}} \tag{10.16}$$

となる。

このように二粒子間に働く力が Fermi 面の近くで引力があれば，対が角運動を持った状態であっても束縛状態ができることが示された。そして，対

を1個つくるとエネルギーが低い状態が得られたということはこのような対を次々とつくればさらに系のエネルギーは低くなるということを意味する。したがって，系の基底状態は $g_l > 0$ の中で g_l が一番大きい対，すなわち束縛エネルギーの一番大きい対がマクロな数凝縮した状態になっているものと思われる。しかし，この基底状態を求めるにはまた別の取り扱いが必要になる。

10–2 1S 対凝縮状態

超流動 ^{3}He では三重項 P 波 (3P) の粒子対が凝縮する。P 波すなわち角運動量 $L = 1$ の対では軌道状態に $L_z = 1, 0, -1$ の 3 つの状態があり，また三重項スピン状態にも $S_z = 1, 0, -1$ の状態がある。したがって，3P 状態の対は $3 \times 3 = 9$ 個の内部自由度を持っている。このような $L \neq 0$ の内部自由度を持った対では一重項 S 波 (1S) の場合と比較して内部自由度からくる複雑な要素が加わる。そこでこの節ではまず 1S の対凝縮状態の紹介をし，3P の状態については 11 章で改めて紹介することにする。

BCS 有効ハミルトニアン　対の相互作用が (10.12) で与えられるとすると，S 波の場合の有効ハミルトニアンは簡単のために体積 $V = 1$ として

$$H = \sum_{\boldsymbol{p}\sigma} \left(\frac{p^2}{2m} - \mu \right) a^+_{\boldsymbol{p}\sigma} a_{\boldsymbol{p}\sigma} - g \sum_{\boldsymbol{p}}{}' \sum_{\boldsymbol{p}'}{}' a^+_{\boldsymbol{p}\uparrow} a^+_{-\boldsymbol{p}\downarrow} a_{-\boldsymbol{p}'\downarrow} a_{\boldsymbol{p}'\uparrow} \tag{10.17}$$

となる。ただし，相互作用の強さを $g_{l=0} = g$ とし，また右辺第二項の $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}'$ の和は $|\varepsilon_{\boldsymbol{p}} - \varepsilon_{\mathrm{F}}| < \varepsilon_{\mathrm{c}}$，$|\varepsilon_{\boldsymbol{p}'} - \varepsilon_{\mathrm{F}}| < \varepsilon_{\mathrm{c}}$ の範囲に制限されている。また，運動エネルギーは化学ポテンシャルを基準に測ることとして以下

$$\xi_p = \frac{p^2}{2m} - \mu \tag{10.18}$$

と書くことにする。

ハミルトニアン (10.17) を平均場近似して対の凝縮状態を取り扱うことができる。相互作用項において，4 個の a, a^+ の演算子のうち 2 個の積をその平均値が置き換えてしまうのが平均場近似である。例えば，相互作用の演算子で $a^+_{\boldsymbol{p}\uparrow} a_{\boldsymbol{p}'\uparrow}$ または $a^+_{-\boldsymbol{p}\downarrow} a_{-\boldsymbol{p}'\downarrow}$ を平均値で置き換えるといわゆる Hartree-Fock 近似になる。しかし，この近似項からの寄与はすでに正常状態においても存在するものであり，対凝縮特有のものではない。対凝縮を特徴づけるのは (10.1) に示したように $\langle aa \rangle$ あるいは $\langle a^+ a^+ \rangle$ タイプの平均値

がゼロでないということであった。そこで平均場近似で，$\langle aa\rangle$ と $\langle a^+a^+\rangle$ タイプの項のみ残して，$\langle a^+a\rangle$ の項は無視することにする。その結果 (10.17) のハミルトニアンは

$$H=\sum_{\boldsymbol{p}\sigma}\xi_p a^+_{\boldsymbol{p}\sigma}a_{\boldsymbol{p}\sigma}-\sum_{\boldsymbol{p}}{}'(\Delta^* a_{\boldsymbol{p}\uparrow}a_{-\boldsymbol{p}\downarrow}+\Delta a^+_{-\boldsymbol{p}\downarrow}a^+_{\boldsymbol{p}\uparrow})+g^{-1}|\Delta|^2 \quad (10.19)$$

となる。ただし

$$\Delta=g\sum_{\boldsymbol{p}}{}'\langle a_{\boldsymbol{p}\uparrow}a_{-\boldsymbol{p}\downarrow}\rangle \quad (10.20)$$

であり，Δ は対凝縮を特徴づけるパラメーターである。また (10.19) 式右辺最後の項は相互作用を二重に数えないために加わった項で平均場近似が，$(a^+a^+-\langle a^+a^+\rangle)(aa-\langle aa\rangle)=0$ とする近似であることを考えれば容易に推測される結果である。

Bogoliubov 変換[3]　分子場近似によって (10.19) のハミルトニアンは演算子 a^+, a について二次形式になった。したがって，このハミルトニアンは次の変換で新しい演算子 α^+, α を導入すると対角化できる。

$$\begin{aligned} a_{\boldsymbol{p}\uparrow}&=u^*_{\boldsymbol{p}}\alpha_{\boldsymbol{p}\uparrow}-v_{\boldsymbol{p}}\alpha^+_{-\boldsymbol{p}\downarrow}\\ a^+_{-\boldsymbol{p}\downarrow}&=v^*_{\boldsymbol{p}}\alpha_{\boldsymbol{p}\uparrow}+u_{\boldsymbol{p}}\alpha^+_{-\boldsymbol{p}\downarrow}\end{aligned} \quad (10.21)$$

この変換を Bogoliubov 変換という。$u_{\boldsymbol{p}}$ および $v_{\boldsymbol{p}}$ は複素数のパラメーターである。いま，この変換が

$$|u_{\boldsymbol{p}}|^2+|v_{\boldsymbol{p}}|^2=1 \quad (10.22)$$

のユニタリ変換であれば，$\alpha_{\boldsymbol{p}\sigma}, \alpha^+_{\boldsymbol{p}\sigma}$ も反交換関係

$$\begin{aligned} \alpha_{\boldsymbol{p}\sigma}\alpha^+_{\boldsymbol{p}'\sigma'}+\alpha^+_{\boldsymbol{p}'\sigma'}\alpha_{\boldsymbol{p}\sigma}&=\delta_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'}\delta_{\sigma,\sigma'}\\ \alpha_{\boldsymbol{p}\sigma}\alpha_{\boldsymbol{p}'\sigma'}+\alpha_{\boldsymbol{p}'\sigma'}\alpha_{\boldsymbol{p}\sigma}&=0\\ \alpha^+_{\boldsymbol{p}\sigma}\alpha^+_{\boldsymbol{p}'\sigma'}+\alpha^+_{\boldsymbol{p}'\sigma'}\alpha^+_{\boldsymbol{p}\sigma}&=0\end{aligned} \quad (10.23)$$

を満たしていることは，(10.21) の逆変換が

$$\begin{aligned} \alpha_{\boldsymbol{p}\uparrow}&=u_{\boldsymbol{p}}a_{\boldsymbol{p}\uparrow}+v_{\boldsymbol{p}}a^+_{-\boldsymbol{p}\downarrow}\\ \alpha^+_{-\boldsymbol{p}\downarrow}&=-v^*_{\boldsymbol{p}}a_{\boldsymbol{p}\uparrow}+u^*_{\boldsymbol{p}}a^+_{-\boldsymbol{p}\downarrow}\end{aligned} \quad (10.24)$$

であることから確かめることができる。

さて，(10.21) を (10.19) 式に代入すると $\alpha^+\alpha$ の項，$\alpha\alpha$ および $\alpha^+\alpha^+$ の項そして定数項が現れる。このうち $\alpha\alpha, \alpha^+\alpha^+$ の項の係数がゼロである

条件

$$2\xi_{\boldsymbol{p}} u_{\boldsymbol{p}} v_{\boldsymbol{p}} - \Delta u_{\boldsymbol{p}}^2 + \Delta^* v_{\boldsymbol{p}}^2 = 0 \tag{10.25}$$

を満たすように $u_{\boldsymbol{p}}, v_{\boldsymbol{p}}$ を選べば，ハミルトニアンは対角化され，

$$H = E_0 + \sum_{\boldsymbol{p}} E_p (\alpha_{\boldsymbol{p}\uparrow}^+ \alpha_{\boldsymbol{p}\uparrow} + \alpha_{\boldsymbol{p}\downarrow}^+ \alpha_{\boldsymbol{p}\downarrow}) \tag{10.26}$$

$$E_0 = \sum_{\boldsymbol{p}} 2\xi_p |v_{\boldsymbol{p}}|^2 - \sum_{\boldsymbol{p}} (u_{\boldsymbol{p}}^* v_{\boldsymbol{p}} \Delta^* + \Delta u_{\boldsymbol{p}} v_{\boldsymbol{p}}^*) + g^{-1} |\Delta|^2$$

そして

$$E_p = \sqrt{\xi_p^2 + |\Delta|^2} \tag{10.27}$$

となる。このとき変換係数 $u_{\boldsymbol{p}}, v_{\boldsymbol{p}}$ は (10.25) から $v_{\boldsymbol{p}}/u_{\boldsymbol{p}} = (E_p - \xi_p)/\Delta^*$，したがって (10.22) を用いて

$$|u_{\boldsymbol{p}}|^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\xi_p}{E_p}\right), \qquad |v_{\boldsymbol{p}}|^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\chi_p}{E_p}\right) \tag{10.28}$$

また

$$u_{\boldsymbol{p}}^* v_{\boldsymbol{p}} = \frac{1}{2}\frac{\Delta}{E_p} \tag{10.29}$$

と決められる。

ハミルトニアン (10.26) に注目しよう。E_p は α, α^+ で記述される準粒子のエネルギーを表し，したがって対凝縮した粒子系が E_p のエネルギーを持つ準粒子の気体とみなしてよいことを示している。また E_0 は励起された準粒子の数が $\langle \alpha_{\boldsymbol{p}\uparrow}^+ \alpha_{\boldsymbol{p}\uparrow} \rangle = \langle \alpha_{\boldsymbol{p}\downarrow}^+ \alpha_{\boldsymbol{p}\downarrow} \rangle = 0$ のときの系のエネルギーすなわち，基底状態のエネルギーである。

ギャップ方程式　対凝縮した系の準粒子の特徴は粒子が束縛対をつくっていることを反映して，励起するのに最低 $|\Delta|$ のエネルギーが必要である。$|\Delta|$ はエネルギー・ギャップとよばれ，対凝縮を特徴づける重要な量である。この $|\Delta|$ の大きさは (10.21) を (10.20) に代入してセルフ・コンシステントに決められる。$\langle \alpha\alpha \rangle = \langle \alpha^+ \alpha^+ \rangle = 0$ および (10.29) を用いて

$$\Delta = g {\sum_{\boldsymbol{p}}}' \frac{\Delta}{2E_p} (1 - \langle \alpha_{\boldsymbol{p}\uparrow}^+ \alpha_{\boldsymbol{p}\uparrow} \rangle - \langle \alpha_{\boldsymbol{p}\downarrow}^+ \alpha_{\boldsymbol{p}\downarrow} \rangle) \tag{10.30}$$

というギャップ方程式とよばれる方程式が得られる。

ギャップ方程式から，まず $T = 0$ でのギャップを求めてみよう。(10.30) 式から $\Delta \neq 0$ とすると

$$1 = g{\sum_{\boldsymbol{p}}}' \frac{1}{2E_p} = N(0)g\int_0^{\varepsilon_c} \frac{d\xi}{(\xi^2+\Delta_0^2)^{1/2}} \tag{10.31}$$

が得られる。ただし，$\Delta_0 = \Delta\ (T=0)$ とおいた。$N(0)g \ll 1$ の弱結合の場合には，エネルギー・ギャップは

$$\Delta_0 = 2\varepsilon_c \exp\left(-\frac{1}{gN(0)}\right) \tag{10.32}$$

と求まる。

系の温度が有限になると熱的に多数の準粒子が励起される。励起された準粒子の熱平衡状態での粒子数分布を考えよう。対凝縮状態での準粒子も (10.23) の交換関係で示されたように Fermi 統計に従う。また，エネルギーは (10.30) の E_p で与えられ，粒子数は保存しないので $\mu = 0$ である。したがって，粒子数分布は Fermi 分布

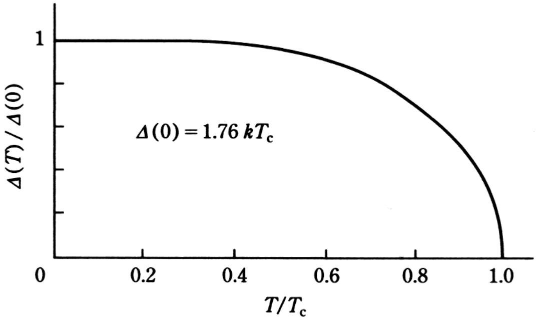
$$\langle \alpha_{\boldsymbol{p}\sigma}^{+} \alpha_{\boldsymbol{p}\sigma} \rangle = n(E_p) = \frac{1}{e^{\beta E_p}+1} \tag{10.33}$$

となる。ギャップ方程式 (10.30) はしたがって，有限温度で

$$1 = g{\sum_{\boldsymbol{p}}}' \frac{1}{2E_p}(1-2n(E_p)) = N(0)g\int_0^{\varepsilon_c} \frac{d\xi}{E_p} \tanh\frac{E_p}{2k_{\mathrm{B}}T} \tag{10.34}$$

と書けることになる。

転移温度　　ギャップ方程式の解は $T=0$ で $\Delta = 0$ と $\Delta = \Delta_0$ の 2 つあった。このうち $\Delta \neq 0$ の解の温度変化は (10.34) を数値的に解くことによって得られる。その結果を 10·1 図に示した。$|\Delta|$ は T が増加するととも



10·1 図　エネルギー・ギャップの温度依存

に単調に減少し，ある温度 T_c でゼロになる。$T > T_c$ ではギャップ方程式の解は，$|\Delta| = 0$ のみである。したがって，T_c は超伝導の転移温度であり，(10.34) で $|\Delta| = 0$ とおいた次の方程式から決められる。

$$1 = gN(0)\int_0^{\varepsilon_c}\frac{d\xi}{\xi}\tanh\frac{\xi}{2k_BT_c} \simeq gN(0)\ln\left(\frac{2\gamma\varepsilon_c}{\pi k_BT_c}\right) \tag{10.35}$$

ただし $k_BT_c \ll \varepsilon_c$ とした。$\ln\gamma \simeq 0.577$ は Euler 定数とよばれ，したがって $\gamma \simeq 1.78$ である。k_BT_c を (10.32) の $T = 0$ でギャップ Δ_0 と比較すると

$$2\Delta_0 = \frac{2\pi}{\gamma}k_BT_c \simeq 3.5k_BT_c \tag{10.36}$$

という弱結合近似での関係式が得られる。

熱力学量　超伝導状態での熱力学量を計算しておく。まず，エントロピーは，Fermi 気体に対する表式を用いて

$$\begin{aligned} S &= -2k_B\sum_{\boldsymbol{p}}\{n(E_p)\ln n(E_p) + [1-n(E_p)]\ln[1-n(E_p)]\} \\ &= -2k_B\sum_{\boldsymbol{p}}\left\{\ln[1-n(E_p)] - \frac{E_p}{k_BT}n(E_p)\right\} \end{aligned} \tag{10.37}$$

となる。式の変形には (10.33) 式を用いた。したがって，超伝導状態での自由エネルギー F_s は (10.26)，(10.37) 式から

$$\begin{aligned} F_s &= \langle H\rangle - TS \\ &= g^{-1}|\Delta|^2 - \sum_{\boldsymbol{p}}(E_p - \xi_p) + 2k_BT\sum_{\boldsymbol{p}}\ln[1-n(E_p)] \end{aligned} \tag{10.38}$$

と求まる。ただし最後の表式には $\langle H\rangle = E_0 + \sum_{\boldsymbol{p}} 2E_pn(E_p)$ に (10.28)，(10.29) の $u_{\boldsymbol{p}}, v_{\boldsymbol{p}}$ を代入し用いた。

自由エネルギー F_s はギャップ方程式 (10.34) と密接に関係している。すなわち F_s をΔ, Δ^* の関数と考え，Δ^* について F_s が極小になる条件，$\partial F_s/\partial\Delta^* = 0$ はギャップ方程式と一致する。このことは (10.38) から直接確かめることができ，したがって Δ は熱平衡状態の条件で決まっていることになる。

比熱はエントロピー (10.37) から $C = T\,\partial S/\partial T$ の関係をつかって，

$$C = 2\sum_{\boldsymbol{p}}\left(\frac{1}{2}\frac{d|\Delta|^2}{dT} - \frac{E_p^2}{T}\right)n'(E_p) \tag{10.39}$$

と求まる。ただし，$n'(E) = \partial n(E)/\partial E$ である。

$k_BT \ll |\Delta|$ が成り立つ十分低温では $|\Delta| \simeq \Delta_0, n(E_p) \simeq \exp(-\Delta_0/k_BT)$ と近似することができて

$$C \simeq \frac{2N(0)\Delta_0^2}{k_BT^2}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp\left[-\frac{1}{k_BT}\left(\Delta_0 + \frac{\xi^2}{2\Delta_0}\right)\right]$$
$$= \frac{2N(0)\Delta_0^2}{k_BT^2}(2\pi\Delta_0 k_BT)^{1/2}e^{-\frac{\Delta_0}{k_BT}} \tag{10.40}$$

となる。比熱の温度変化は，主に $\exp(-\Delta_0/k_BT)$ で決まり，したがって Δ_0 を実験的に決めるのに低温での比熱の測定は重要である。

次に転移点近傍での様子をみてみよう。10·1 図に示したように転移点近傍では Δ が小さいため熱力学量を Δ で展開でき，表式は簡単になる。まず F_s を Δ で展開してみよう。F_s は $|\Delta|^2$ の関数であり，$|\Delta|^2$ についての 1 階微分，2 階微分は (10.38) よりそれぞれ

$$\frac{\partial F_s}{\partial|\Delta|^2} = g^{-1} - \sum_{\boldsymbol{p}}{}' \frac{1-2n(E_p)}{2E_p}$$
$$\frac{\partial^2 F_s}{\partial(|\Delta|^2)^2} = -\sum_{\boldsymbol{p}}{}' \frac{1}{2E}\frac{\partial}{\partial E}\frac{1-2n(E)}{2E}\bigg|_{E=E_p}$$

となる。これらを用いて

$$F_s = F_n + \frac{\partial F_s}{\partial|\Delta|^2}\bigg|_{\Delta=0}|\Delta|^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F_s}{\partial(|\Delta|^2)^2}\bigg|_{\Delta=0}|\Delta|^4 \tag{10.41}$$

と F_s の常伝導状態の自由エネルギー F_n からの展開式が得られる。

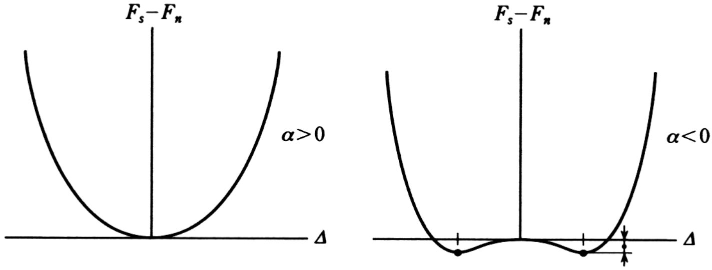
展開係数は次のようにして計算される。まず，2 次の係数は (10.34), (10.35) 式より，$T_c - T \ll T_c$ では，

$$\frac{\partial F_s}{\partial|\Delta|^2}\bigg|_{\Delta=0} = g^{-1} - \sum_{\boldsymbol{p}}{}' \frac{1-2n(\xi_p)}{2\xi_p} = N(0)\ln\frac{T}{T_c}$$
$$\simeq N(0)\frac{T-T_c}{T_c} \tag{10.42}$$

となる。また，4 次の係数の計算では公式

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2+x^2} = \frac{\pi}{4x}\tanh\frac{\pi x}{2}$$

を利用して変形する。また，ξ 積分は収束するので $-\infty$ から ∞ までとることにする。



10·2 図 Ginzburg-Landau の自由エネルギー。
$T>T_c$ $(\alpha>0)$ では$\Delta=0$ でエネルギーが極小になるが，$T<T_c$ $(\alpha<0)$ では $|\Delta|^2=-|\alpha|^2/2\beta$ のときエネルギーが極小になる。

$$\left.\frac{\partial^2 F_s}{\partial(|\Delta|^2)^2}\right|_{\Delta=0} = -N(0)\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{1}{2\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{\tanh\frac{\xi}{2k_B T}}{2\xi}$$
$$= N(0)\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{2}{\pi(\pi k_B T)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{[(2n+1)^2+x^2]^2}$$
$$= \frac{N(0)}{(\pi k_B T)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3} = \frac{N(0)}{(\pi k_B T)^2}\frac{7}{8}\zeta(3) \quad (10.43)$$

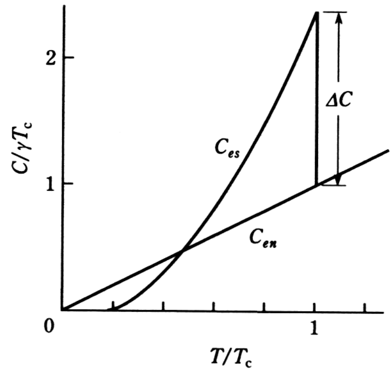
したがって，F_s は

$$F_s = F_n + N(0)\left[\frac{T-T_c}{T_c}|\Delta|^2 + \frac{7\zeta(3)}{16}\frac{1}{(\pi k_B T_c)^2}|\Delta|^4 + \cdots\right] \quad (10.44)$$

となる。

転移点近傍での自由エネルギーの表式 (10.44) は BCS 理論が現れる以前に Ginzburg と Landau により[4)]，二次相転移の一般論を用いて導出されていた。Ginzburg と Landau は量子力学的性質を持つ超伝導状態を表す秩序変数として複素量 Δ を導入し，転移点近傍で自由エネルギーを $|\Delta|^2$ で展開した。そして，$T=T_c$ で秩序変数が連続的に変化する二次相転移においては 10·2 図で示したように $|\Delta|$ の 2 次の係数が T_c で正から負へと符号を変え，一方，4 次の係数は常に正であればよいとした。我々は BCS 理論を

† $\zeta(k)$ はツェータ関数で $\zeta(k)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}$ と定義される。また $\zeta(3)\simeq 1.20$ である。



10·3 図　比熱の温度変化。
二次転移にともなう $\Delta c/\gamma T_c = 1.43$ のとびが現れている。
ただし $\gamma = (2/3)\pi^2 N(0) k_B$ である。

つかって Ginzburg-Landau の自由エネルギー (G-L エネルギー)† を微視的に導いたことになる。

(10.44) を微分して $T \le T_c$ で自由エネルギーの極大を与える Δ を求めると，

$$|\Delta|^2 = \frac{8\pi^2 k_B^2 T_c^2}{7\zeta(3)} \cdot \frac{T_c - T}{T_c} \tag{10.45}$$

を得る。このとき

$$F_s - F_n = -N(0)\frac{4\pi^2 k_B^2 T_c^2}{7\zeta(3)}\left(\frac{T_c - T}{T_c}\right)^2 \tag{10.46}$$

となる。したがって，エントロピーは $T \to T_c$ で常伝導状態の値に連続的につながるが，一方，比熱には不連続的なとびがあり，2 次の相転移であることがわかる。その比熱のとびを ΔC とすると

$$\Delta C = N(0)\frac{8\pi^2 k_B^2}{7\zeta(3)} T_c = \frac{12}{7\zeta(3)} C_n(T_c) \simeq 1.43 C_n(T_c) \tag{10.47}$$

ただし $C_n(T_c)$ は常伝導状態 $T = T_c$ での比熱で (9.34) で与えられている。比熱の温度変化の様子を 10·3 図に示した。

スピン帯磁率　1S 超伝導状態でのスピン帯磁率の計算は次章で述べる

† G-L エネルギーには Δ の空間変化に伴う項も含まれているが，(10.44) ではその項を考えていない。

超流動 ^{3}He での計算の参考になるので紹介しておく。ただし，電荷を持った電子対が凝縮する超伝導状態では弱い磁場は大きな試料すなわちバルクの試料にはマイスナー効果により侵入できない。したがって，以下の計算が適用できるのは，例えば十分小さい試料に対してであることを注意しておく。

空間的に一様な磁物がかかったときの系のエネルギーは，Fermi 液体などでの相互作用からくる効果は簡単のため無視すると

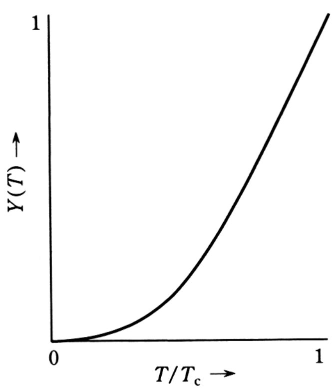
$$H' = -\mu_0 H_0 \sum_{\boldsymbol{p}} (a^+_{\boldsymbol{p}\uparrow} a_{\boldsymbol{p}\uparrow} - a^+_{\boldsymbol{p}\downarrow} a_{\boldsymbol{p}\downarrow}) = -H_0 M \tag{10.48}$$

だけ変化する。(10.21) の変換により磁化 M を Bogoliubov 準粒子で書きかえると

$$M = \mu_0 \sum_{\boldsymbol{p}} (\alpha^+_{\boldsymbol{p}\uparrow} \alpha_{\boldsymbol{p}\uparrow} - \alpha^+_{\boldsymbol{p}\downarrow} \alpha_{\boldsymbol{p}\downarrow}) \tag{10.49}$$

となり，対角化されていることがわかる。これは一様な磁場の中で，準粒子のエネルギーが $\pm\mu_0 H_0$ だけ変化することを意味し，したがって，磁化の期待値は簡単に計算できる。そして帯磁率は

$$\begin{aligned}\chi_s &= \lim_{H_0\to 0} \frac{\mu_0}{H_0} \sum_{\boldsymbol{p}} (n(E_{\boldsymbol{p}\uparrow}) - n(E_{\boldsymbol{p}\downarrow})) \\ &= -2\mu_0^2 \sum_{\boldsymbol{p}} n'(E_p)\end{aligned} \tag{10.50}$$



10·4 図 芳田関数

となる。また

$$\frac{\chi_s}{\chi_n} = Y(T) = \int_0^\infty d\xi n'(E_p) \tag{10.51}$$

で定義される $Y(T)$ は芳田関数とよばれ，10·4 図に示したように温度変化する。ただし (9.9) 式で与えたように $\chi_n = 2N(0)\mu_0^2$ は常伝導状態でのスピン帯磁率である。

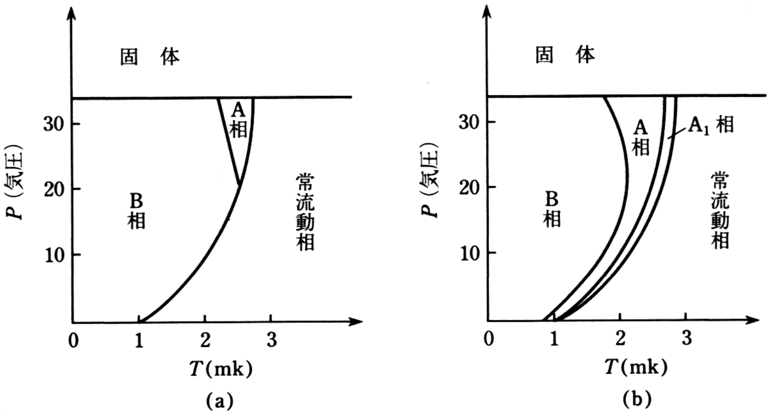
11. 超流動 ^{3}He

超流動 ^{3}He の粒子対は 3P 状態すなわちスピン角運動量 $S=1$，軌道角運動量 $L=1$ と内部自由度を持っている。このような内部自由度を持った ^{3}He の超流動状態がどのような性質を示し，またそれが理論的にどのように理解されているかを述べる。軌道角運動量 L がゼロでない系の例としては超流動 ^{3}He が最初に発見され，また最も簡単な系であるが，他にも核物質での超流動，最近発見された重い電子系での超伝導，高温超伝導などもそのような状態でないかと考えられている。

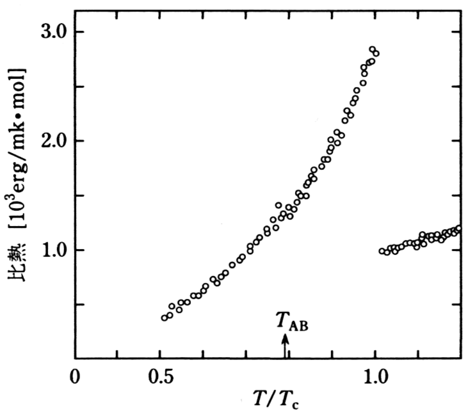
11–1 超流動相での実験結果

液体 ^{3}He の超流動相の相図を 11·1 図に示す。超流動相には高温，高圧の領域に存在する A 相とよばれる相とそれ以外の領域をしめる B 相とよばれる相の 2 つの相がある。また，磁場をかけるともう一つの超流動相が転移線に沿って現れる。この相は A_1相とよばれている。これらの超流動相がどのような性質をもっているか，最初に基本的な実験結果を紹介する。

熱力学的性質　11·1 図の相図を決定するのに比熱の測定は重要な役割を果たした。融解曲線に沿って行われた比熱の測定結果を 11·2 図に示す[1)]。まず $T=T_c$ のところに常流動相から超流動 A 相への二次相転移にともなう比熱の大きなとびがみられる。この比熱のとびをΔC とするとΔC と T_c での常流動状態の比熱 C_n との比$\Delta C/C_n$ は 2 より大きな値になり，これは弱結合理論から予測される値よりもずっと大きな値である。したがって，圧力が高い状態での超流動 ^{3}He は弱結合理論では定量的には扱えないこと



11·1 図　^{3}He の P-T 相図
(a)　磁場がかかっていない場合。(b)　磁場がかかった場合。A および A_1 の領域は磁場とともに増大するが，B の領域は減少する。



11·2 図　融解曲線に沿って測られた超流動 ^{3}He の比熱。磁場 $H = 0$ である。矢印 (T_{AB}) において A 相から B 相へ転移する。

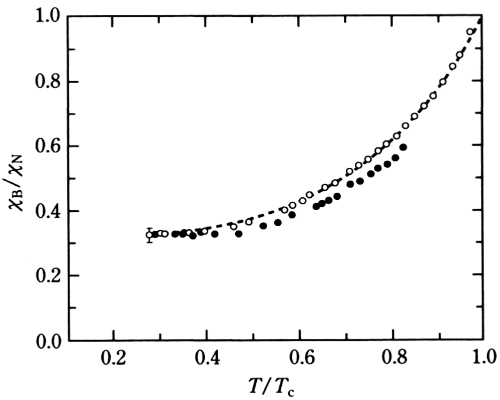
を示している。しかし，圧力を低くすると $\Delta C/C_n$ は弱結合の理論値に近づくことが知られており，低圧領域では弱結合理論が十分よい近似になっている。次に A 相から B 相への転移点 T_{AB} を矢印で示した。A 相から B 相への転移は一次転移と考えられるが，それは図のような比熱のごく小さ

な変化として現れている。したがって，それから求められた潜熱も非常に小さく，A 相と B 相はエネルギー的にほとんど縮退した状態であることがわかる。

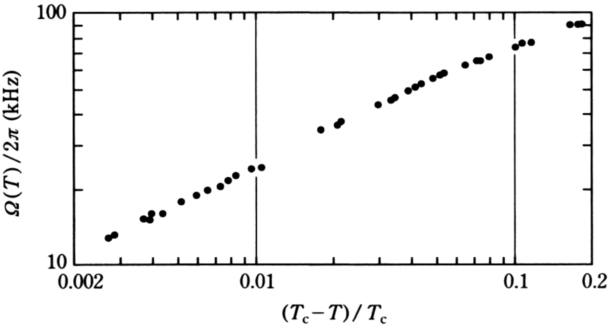
次に比熱の温度依存をみてみる。A 相の比較的低温領域をみると温度変化は $C(T) \propto T^3$ となっている。また，B 相では低温の領域で，$C(T) \propto e^{-\Delta/k_B T}$ という温度変化を示す。これは，B 相が 1S の超伝導体と同様に Fermi 面の全面で Δ の大きさ一定のギャップがひらいた状態にあるのに対して，A 相ではギャップの大きさが Fermi 面上で変化し，ゼロになるところがあることを示している。実際，A 相のギャップ Δ は Fermi 球の南極と北極にあたる点で $\Delta = 0$ となっていると考えられる。

磁気的性質 11·3 図に圧力 $P = 18.7$ 気圧と 29.0 気圧での帯磁率 χ_B の温度変化を示す[2)]。$P = 18.7$ 気圧では相図からわかるように転移は A 相を通らずに常流動から直接 B 相へ転移するが，29.0 気圧では高温 ($T/T_c \gtrsim 0.8$) で A 相になる。いずれにしても B 相での帯磁率は転移点以下，温度とともに減少する。これは 10·4 図に示した 1S 状態の帯磁率の振舞いと似ているが，違いは $T = 0$ で χ_B は有限に残ることである。一方，A 相の帯磁率 χ_A は常流動相での帯磁率 χ_n からほとんど変化しないことが知られている。

スピン角運動量が $S = 1$ の三重項状態にある超流動 ^{3}He では，そのスピンの運動を直接観測する NMR の実験は，凝縮相の状態を調べるのに大変強力な観測手段である。実際，Osheroff 達による NMR の共鳴周波数での



11·3 図 B 相での帯磁率の温度変化。○ および ● はそれぞれ圧力 $P = 18.7$ 気圧と 29.0 気圧の結果である。



11·4 図　A 相における NMR 横振動の共鳴周波数のシフトの温度変化。転移点近傍融解曲線に沿って測定された結果である。

異常の発見とそれを説明した Leggett の理論は Cooper 対が P 波の状態であること，さらに，そのなかで A 相と B 相がどのような状態であるかを同定するのに決定的な役割を果した。

11·4 図に融解曲線に沿って観測された横振動†NMR の共鳴周波数のシフト $\Omega(T)$ の温度変化を示した[3)]。横振動の共鳴周波数 ω は

$$\omega^2 = \omega_L^2 + \Omega^2(T) \tag{11.1}$$

と表される。ω_L は Larmor 振動数，$\Omega(T)$ は ω_Lからのシフトで磁場の強さによらない。実験では常流動相では $\omega = \omega_L$，A 相に入るとシフト$\Omega(T)$が表れ，$\Omega(T) \propto (T_c - T)^{1/2}$ の温度変化を示す。さらに，温度が下がって A 相から B 相へ転移すると，シフトはまた$\Omega(T) = 0$ となる。スピンの運動について詳しい説明は 11–4 節で行う。

11–2　微視的理論

9–2 節で述べたように Landau の Fermi 液体理論によれば，強く相互作用をしている Fermi 粒子系である液体 ^{3}He において，低エネルギーの励起状態は ^{3}He 原子が着物を着た Fermi 統計に従う準粒子によって記述される。液体 ^{3}He ではおよそ 100mK より低い温度では Fermi 液体理論が適用できると考えられているので，超流動転移が起こる数 mK という温度は Landau 準粒子で記述できる条件を十分満たしている。したがって，超流動転移は

† 一様な外部磁場に垂直方向から振動磁場をかけたときの共鳴周波数。

はだかの ^{3}He 原子が Cooper 対を形成すると考えるのではなく，この準粒子が対を形成して起こると考えなければならない。はだかの ^{3}He 原子間に働く van der Waals 力はまず準粒子を形成するのに使われ，その残った部分から準粒子間の引力がでてくる。というわけで，もとの van der Waals 力から，準粒子間に働く引力を求めるというのは大変難しい問題で，いまだに定量的に満足できる計算はなされていない。そこで 10 章で行ったのと同じように，最初は弱結合の簡単な模型を用いて ^{3}He の超流動を議論する。もちろん ^{3}He の超流動状態を説明するのに弱結合の近似では十分でない場合がある。そのときには適宜，強結合の効果を取り入れて議論する。

BCS 有効ハミルトニアン　金属中の電子の超伝導においてフォノンを媒介にして電子間に引力が誘起された。液体 ^{3}He では van dar Waals 力からの直接の引力の他に，スピンのゆらぎ (パラマグノンとよばれている) を媒介にした引力が働くと考えられている。スピンのゆらぎを媒介にして得られる対相互作用ポテンシャルは準粒子の持つスピンに依存する。そこで，一般化した BCS 有効ハミルトニアンを

$$H=\sum_{\boldsymbol{p}\alpha}\xi_p a^+_{\boldsymbol{p}\alpha}a_{\boldsymbol{p}\alpha}+\frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{p}\boldsymbol{p}'}{}'\sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}V_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(\widehat{\boldsymbol{p}},\widehat{\boldsymbol{p}'})a^+_{-\boldsymbol{p}\alpha}a^+_{\boldsymbol{p}\beta}a_{\boldsymbol{p}'\gamma}a_{-\boldsymbol{p}'\delta} \quad (11.2)$$

と書く。ただし，第 1 項の ξ_p は Fermi 面から測った準粒子のエネルギー，第 2 項は弱結合近似した対相互作用で，$V_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(\widehat{\boldsymbol{p}},\widehat{\boldsymbol{p}'})$ は $\boldsymbol{p}$ および $\boldsymbol{p}'$ の方向のみ関数，運動量の和にダッシュを付けたのは Fermi 面の近傍 $|\xi_p|$, $|\xi_{p'}|<\varepsilon_c$ $(\varepsilon_c \ll \varepsilon_F)$ に制限されていることを意味する。

$V_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(\widehat{\boldsymbol{p}},\widehat{\boldsymbol{p}'})$ がスピン空間での回転に対して不変であるとすると

$$V_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(\widehat{\boldsymbol{p}},\widehat{\boldsymbol{p}'})=V_1(\widehat{\boldsymbol{p}},\widehat{\boldsymbol{p}'})\delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}+V_2(\widehat{\boldsymbol{p}},\widehat{\boldsymbol{p}'})(\boldsymbol{\sigma})_{\alpha\delta}\cdot(\boldsymbol{\sigma})_{\beta\gamma} \quad (11.3)$$

と書ける。ただし，σ は Pauli 行列

$$\sigma_x=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad \sigma_y=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix},\quad \sigma_z=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix} \quad (11.4)$$

である。また，系が実空間でも等方的な場合には，$V_1(\widehat{\boldsymbol{p}},\widehat{\boldsymbol{p}'}), V_2(\widehat{\boldsymbol{p}},\widehat{\boldsymbol{p}'})$ は $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{p}'$ のなす角 θ のみの関数と考えられ，Legendre 関数 $P_l(\cos\theta)$ を用いて

$$V_{1,2}(\widehat{\boldsymbol{p}},\widehat{\boldsymbol{p}'})=\sum_l V^{(l)}_{1,2}P_l(\cos\theta) \quad (11.5)$$

と書くことができる。

(11.3) 右辺第 2 項のような対相互作用ポテンシャルがスピンのゆらぎを

媒介にしてでてくる機構についての詳しい議論が，Leggett によってなされている[4]。次にその議論を紹介しておく。この対相互作用ポテンシャルが重要なのは後で述べるようにこのポテンシャルが一重項状態に対して斥力に，三重項状態に対しては引力になり，三重項状態を安定化するとともに，B 相の状態と比較して高温高圧側では A 相の状態がより安定になるということもこのポテンシャルでの強結合の効果を取り入れることで説明されるからである。

いま，空間の 2 つの場所 $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{r}'$ に $\mu_0\boldsymbol{\sigma}$ と，$\mu_0\boldsymbol{\sigma}'$ の磁気モーメントを持った準粒子が存在するとして，それにともなうエネルギーを Fermi 液体理論を用いて考える。まず，スピン・ベクトル $\boldsymbol{\sigma}'$ の j 成分 σ'_jが作る分子場は (9.27) を参照して

$$H'_j = -\frac{1}{\mu_0} f_0^a \sigma'_j$$

と与えられる。$\boldsymbol{r}'$ に生じた分子場は $\boldsymbol{r}$ 近傍の準粒子を分極させ，磁化 $M_i(\boldsymbol{r}) = \int d\boldsymbol{r}' \chi_{ij}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')H_j(\boldsymbol{r}')$ をつくる†。ところが，これは上の関係をもう一度考慮することにより，

$$H_i(\boldsymbol{r}) = -\frac{f_0^a}{\mu_0}\frac{M_i(\boldsymbol{r})}{\mu_0} = -\frac{1}{\mu_0} f_0^a \frac{1}{\mu_0}\int d\boldsymbol{r}' \chi_{ij}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')H'_j(\boldsymbol{r}')$$

の分子場が発生しているとみることもできる。したがって，$\boldsymbol{r}$ に置かれた $\mu_0\sigma$ の磁気モーメントを持つ準粒子のエネルギーは，

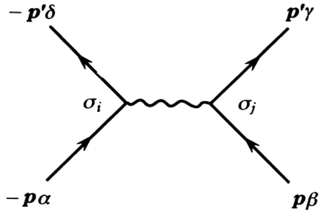
$$\delta\varepsilon = -\mu_0\sigma_i H_i(\boldsymbol{r}) = -\frac{(f_0^a)^2}{\mu_0^2}\int d\boldsymbol{r}' \chi_{ij}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\sigma_i\sigma'_j$$

だけ変化する。以上の議論を Pauli 行列を用いて一般化し，また波数表示をすると，スピンゆらぎにともなう有効相互作用 V_{sf}の行列要素は

$$\begin{aligned}&\langle \boldsymbol{p}\alpha, -\boldsymbol{p}\beta|V_{sf}|-\boldsymbol{p}'\gamma, \boldsymbol{p}'\delta\rangle \\ &\qquad = -\frac{(f_0^a)^2}{\mu_0^2}\chi_{ij}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')(\sigma_i)_{\alpha\delta}(\sigma'_j)_{\beta\gamma} \qquad (11.6)\end{aligned}$$

となる。これらの過程を図で表すと，11·5 図のようになる。また，系がス

† $M=\chi H_0$ の関係式にでてくる帯磁率 χ を H_0 が空間的に変化し，また非等方的な場合に一般化して，$\chi_{ij}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$ を定義する。$\boldsymbol{r}'$ での j 方向の磁場 $H_j(\boldsymbol{r}')$ が $\boldsymbol{r}$ に i 方向の磁化 $M_i(\boldsymbol{r})$ を誘起するとき，それは，$M_i(\boldsymbol{r}) = \int d^3\boldsymbol{r}'\chi_{ij}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')H_j(\boldsymbol{r}')$ と表される。なお，等方的な場合には $\chi_{ij}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = \chi(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\delta_{ij}$ ととれ，また，磁場が空間的に変化しない場合には，$M=\chi H$，$\chi = \int \chi(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')d^3\boldsymbol{r}$ となる。したがって χ は $\chi(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$ を Fourier 変換したときの波数ゼロの成分である。



11·5 図 スピンゆらぎによる対相互作用

ピンについて等方的な場合には，(11.6) は，(11.3) になる。

一重項状態と三重項状態のスピン関数をそれぞれ $\phi_s(\gamma,\delta)$，$\phi_t(\gamma,\delta)$ として

$$\sigma_{\alpha\delta}\sigma_{\beta\gamma}\phi_s(\gamma,\delta) = -3\phi_s(\alpha,\beta)$$
$$\sigma_{\alpha\beta}\sigma_{\beta\gamma}\phi_t(\gamma,\delta) = \phi_t(\alpha,\beta)$$

が成立することを考慮すると，(11.3) の対相互作用ポテンシャルは一重項状態で V_1-3V_2，三重項状態では V_1+V_2 とすればよいことがわかる。したがって，スピンゆらぎを媒介にしたポテンシャル $V_2\,(<0)$ は三重項状態を安定化するように働く。実際，^{3}He の超流動が発見される前には，van der Waals 力から直接引力を計算して D 波の状態が最も転移温度が高いのではという予想もあり，したがって，スピンゆらぎを媒介にした引力は超流動 ^{3}He が P 波であることを説明するのに極めて重要である。結局，弱結合近似での BCS 有効ハミルトニアンを

$$H = \sum_{\boldsymbol{p}} \xi_p a^+_{\boldsymbol{p}\alpha} a_{\boldsymbol{p}\alpha} - \frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{p}}{}' \sum_{\boldsymbol{p}'}{}' g_{\widehat{\boldsymbol{p}},\widehat{\boldsymbol{p}'}}\, a^+_{-\boldsymbol{p}\alpha} a^+_{\boldsymbol{p}\beta} a_{\boldsymbol{p}'\gamma} a_{-\boldsymbol{p}'\delta} \tag{11.7}$$

と書けば，$-g_{\widehat{\boldsymbol{p}},\widehat{\boldsymbol{p}'}} = -g_{\widehat{\boldsymbol{p}'},\widehat{\boldsymbol{p}}}$ は，一重項状態では $V_1(\widehat{\boldsymbol{p}},\widehat{\boldsymbol{p}}') - 3V_2(\widehat{\boldsymbol{p}},\widehat{\boldsymbol{p}}')$ に，三重項状態では $V_1(\widehat{\boldsymbol{p}},\widehat{\boldsymbol{p}}') + V_2(\widehat{\boldsymbol{p}},\widehat{\boldsymbol{p}}')$ にとればよい。

固有値方程式　ハミルトニアン (11.7) を，1S 対で行ったように分子場近似して対の凝縮状態を調べる。ただし，1S 対を考えた場合と違って，平均値 $\langle a^+_{-\boldsymbol{p}\uparrow} a^+_{\boldsymbol{p}\downarrow}\rangle, \langle a^+_{-\boldsymbol{p}\downarrow} a^+_{\boldsymbol{p}\uparrow}\rangle$ だけでなく，$\langle a^+_{-\boldsymbol{p}\uparrow} a^+_{\boldsymbol{p}\uparrow}\rangle, \langle a^+_{-\boldsymbol{p}\downarrow} a^+_{\boldsymbol{p}\downarrow}\rangle$ とそのエルミート共役の平均値もゼロでないとする。したがって，ギャップ関数も

$$\varDelta_{\alpha\beta}(\widehat{\boldsymbol{p}}) = \sum_{\boldsymbol{p}'}{}' g_{\widehat{\boldsymbol{p}},\widehat{\boldsymbol{p}'}} \langle a_{\boldsymbol{p}'\alpha} a_{-\boldsymbol{p}'\beta}\rangle \tag{11.8}$$

の 4 種類とその複素共役，

$$\Delta^*_{\alpha\beta}(\widehat{\boldsymbol{p}}) = \sum_{\boldsymbol{p}'}{}' g_{\widehat{\boldsymbol{p}},\widetilde{\boldsymbol{p}}'}\langle a^+_{-\boldsymbol{p}'\beta}a^+_{\boldsymbol{p}'\alpha}\rangle \tag{11.9}$$

を考慮する必要がある。また，分子場近似したハミルトニアンは，

$$\begin{aligned}H_m = &\sum_{\boldsymbol{p},\alpha}{}' \xi_p a^+_{\boldsymbol{p}\alpha}a_{\boldsymbol{p}\alpha} - \frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{p},\alpha,\beta}{}' [\Delta_{\alpha\beta}(\widehat{\boldsymbol{p}})a^+_{-\boldsymbol{p}\beta}a^+_{\boldsymbol{p}\alpha} \\ &+\Delta^*_{\alpha\beta}(\widehat{\boldsymbol{p}})a_{\boldsymbol{p}\alpha}a_{-\boldsymbol{p}\beta}] + \frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{p},\alpha,\beta}{}' \langle a^+_{-\boldsymbol{p}\beta}a^+_{\boldsymbol{p}\alpha}\rangle\Delta_{\alpha\beta}(\widehat{\boldsymbol{p}})\end{aligned} \tag{11.10}$$

となる。

ハミルトニアン H_m は1Sの場合と同じようにして対角化できるが，少し複雑である。一般の場合には，演算子 $a^+_{-\boldsymbol{p}\alpha}, a_{\boldsymbol{p}\alpha}$ に対する運動方程式をたてて考えていくのが見通しのよい方法である。運動方程式 $i\hbar(\partial a_{\boldsymbol{p}\alpha}/\partial t) = [a_{\boldsymbol{p}\alpha}, H_m]$ および $i\hbar(\partial/\partial t)a^+_{-\boldsymbol{p}\alpha} = [a^+_{-\boldsymbol{p}\alpha}, H_m]$ において，$a_{\boldsymbol{p}\alpha}, a^+_{-\boldsymbol{p}\alpha}$ の時間変化が $\exp(iEt/\hbar)$ であるとすると 4 成分 $(a_{\boldsymbol{p}\uparrow}, a_{\boldsymbol{p}\downarrow}, a^+_{-\boldsymbol{p}\uparrow}, a^+_{-\boldsymbol{p}\downarrow})$ に対する固有値方程式

$$E\begin{pmatrix} a_{\boldsymbol{p}\uparrow} \\ a_{\boldsymbol{p}\downarrow} \\ a^+_{-\boldsymbol{p}\uparrow} \\ a^+_{-\boldsymbol{p}\downarrow}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_p & 0 & \Delta_{\uparrow\uparrow}(\widehat{\boldsymbol{p}}) & \Delta_{\uparrow\downarrow}(\widehat{\boldsymbol{p}}) \\ 0 & \xi_p & \Delta_{\downarrow\uparrow}(\widehat{\boldsymbol{p}}) & \Delta_{\downarrow\downarrow}(\widehat{\boldsymbol{p}}) \\ \Delta^*_{\uparrow\uparrow}(\widehat{\boldsymbol{p}}) & \Delta^*_{\downarrow\uparrow}(\widehat{\boldsymbol{p}}) & -\xi_p & 0 \\ \Delta^*_{\uparrow\downarrow}(\widehat{\boldsymbol{p}}) & \Delta^*_{\downarrow\downarrow}(\widehat{\boldsymbol{p}}) & 0 & -\xi_p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{\boldsymbol{p}\uparrow} \\ a_{\boldsymbol{p}\downarrow} \\ a^+_{-\boldsymbol{p}\uparrow} \\ a^+_{-\boldsymbol{p}\downarrow}\end{pmatrix} \tag{11.11}$$

を得る。ただし，(11.8)，(11.9) から得られる $\Delta_{\alpha\beta}(\widehat{\boldsymbol{p}}) = -\Delta_{\beta\alpha}(-\widehat{\boldsymbol{p}})$ などの関係式を用いた。(11.11) より固有値は，

$$\begin{aligned}(E^2-\xi^2)^2 &- (|\Delta_{\uparrow\uparrow}|^2 + |\Delta_{\uparrow\downarrow}|^2 + |\Delta_{\downarrow\uparrow}|^2 + |\Delta_{\downarrow\downarrow}|^2)(E^2-\xi^2) \\ &+ |\Delta_{\uparrow\uparrow}\Delta_{\downarrow\downarrow} - \Delta_{\uparrow\downarrow}\Delta_{\downarrow\uparrow}|^2 = 0\end{aligned} \tag{11.12}$$

から求まり，一般的には $E = \pm E_+, \pm E_-$ の 4 つあることがわかる。ここで $\xi = \xi_p, \Delta_{\alpha\beta}(\widehat{\boldsymbol{p}}) = \Delta_{\alpha\beta}$ などと略した。

(11.11) において 4 種類のギャップ関数のうち $\Delta_{\uparrow\downarrow}(\widehat{\boldsymbol{p}}) = \Delta_{\downarrow\uparrow}(\widehat{\boldsymbol{p}}) = 0$ の場合を考えておくとあとで役に立つ。このとき，運動方程式は $(a_{\boldsymbol{p}\uparrow}, a^+_{-\boldsymbol{p}\uparrow})$ と $(a_{\boldsymbol{p}\downarrow}, a^+_{-\boldsymbol{p}\downarrow})$ の 2 つの組に分離し，スピン上向きの準粒子とスピン下向きの準粒子の凝縮状態は完全に独立になる。これは，弱結合近似の特徴で，強結合の場合には，$\Delta_{\uparrow\downarrow}(\widehat{\boldsymbol{p}}) = \Delta_{\downarrow\uparrow}(\widehat{\boldsymbol{p}}) = 0$ としても 2 つの凝縮状態の間に結合がある。

次に一重項状態の場合を調べてみる。一重項状態では$\Delta_{\uparrow\uparrow} = \Delta_{\downarrow\downarrow} = 0, \Delta_{\uparrow\downarrow} = -\Delta_{\downarrow\uparrow}$ となり，固有値方程式は，$(a_{\boldsymbol{p}\uparrow}, a^+_{-\boldsymbol{p}\downarrow})$ と $(a_{\boldsymbol{p}\downarrow}, a^+_{-\boldsymbol{p}\uparrow})$ の組に分離し，その固有値は縮退し，$\Delta_{\uparrow\downarrow} = -\Delta_{\downarrow\uparrow} = \Delta_s$ とおくと，$E^2_{\boldsymbol{p}} = \xi^2_{\boldsymbol{p}} + |\Delta_s|^2$ となる。また，(10.24) で定義される Bogoliubov 変換において，その係数が

$$u_p = \frac{E_p + \xi_p}{[(E_p + \xi_p)^2 + |\Delta_s|^2]^{1/2}}, \qquad v_p = \frac{\Delta_s}{[(E_p + \xi_p)^2 + |\Delta_s|^2]^{1/2}} \quad (11.13)$$

で与えられること，そして $\alpha^+_{-p\downarrow}, \alpha_{p\uparrow}$が固有エネルギー E_pを持つ準粒子の生成・消滅演算子であることは

$$E_p \alpha_{p\uparrow} = [\alpha_{p\uparrow}, H], \qquad -E_p \alpha^+_{-p\downarrow} = [\alpha^+_{-p\downarrow}, H]$$

が成立することを (11.11) の固有値方程式と (11.13) を直接代入して示すことにより確かめられる。(11.13) はすでに求めた (10.28)，(10.29) と同じであることも少し変形すれば示せる。

三重項状態と $\boldsymbol{d}$ ベクトル　三重項状態には，$\Delta_{\uparrow\uparrow}$，$\Delta_{\downarrow\downarrow}$，$\Delta_{\uparrow\downarrow} = \Delta_{\downarrow\uparrow} \equiv \Delta_0$ の 3 種類のギャップ関数が存在する。この 3 種類のギャップ関数は $|\uparrow\uparrow\rangle$，$|\downarrow\downarrow\rangle$，$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)$ を表示の基底としたとき，スピンの大きさ $S = 1$ の対の状態が†

$$\Delta_{\uparrow\uparrow}|\uparrow\uparrow\rangle + \Delta_{\downarrow\downarrow}|\downarrow\downarrow\rangle + \Delta_0(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) \quad (11.14)$$

であることを表している。ところで，この表示はスピン空間での回転を考えるときには便利でない。スピン空間での回転を行うときに便利な表示は，$|\uparrow\uparrow\rangle$，$|\downarrow\downarrow\rangle$，$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)$ が，それぞれ $|S_z = 1\rangle$，$|S_z = -1\rangle$，$|S_z = 0\rangle$ であることに注意し，$l = 1$ の球面調和関数

$$Y_{1,\pm1} = \mp i\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{i\pm\varphi} = \mp i\sqrt{\frac{3}{8\pi}}(e_x \pm i e_y),$$

$$Y_{1,0} = i\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta = i\sqrt{\frac{3}{4\pi}} e_z$$

と対応させて求める。ただし $(e_x, e_y, e_z) \equiv (\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta)$ は動径方向の単位ベクトルである。さて新しい基底は e_zに対応して

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) = |z\rangle \quad (11.15a)$$

ととるがこれは $|S_z = 0\rangle$ のことである。$|\uparrow\uparrow\rangle$ と $|\downarrow\downarrow\rangle$ については e_x, e_yに対応して，

---

† $\Delta_{\uparrow\uparrow}, \Delta_{\downarrow\downarrow}, \Delta_0$ は，$\widehat{\boldsymbol{p}}$ の関数であるから Fermi 面上ある $\boldsymbol{p}$ の方向での対の状態を考えている。

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(-|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle) = |x\rangle, \qquad \frac{i}{\sqrt{2}}(|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle) = |y\rangle \tag{11.15b}$$

をとる。そして，

$$\begin{aligned} &\Delta_{\uparrow\uparrow}|\uparrow\uparrow\rangle + \Delta_{\downarrow\downarrow}|\downarrow\downarrow\rangle + \Delta_0(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) \\ &= \sqrt{2}(d_x|x\rangle + d_y|y\rangle + d_z|z\rangle) \end{aligned}$$

の等式により，ベクトル $\boldsymbol{d} = (d_x, d_y, d_z)$ を導入すると，ベクトル $\boldsymbol{d}$ はスピン空間の回転に対して三次元ベクトルとして変換される。このとき

$$\Delta_{\uparrow\uparrow} = -d_x + id_y, \quad \Delta_{\downarrow\downarrow} = d_x + id_y, \quad \Delta_0 = d_z \tag{11.16}$$

の関係がある。ここで，新しい基底は $|z\rangle$ が $S_z = 0$ の状態であるのに対応して，$|x\rangle, |y\rangle$ はそれぞれ対のスピンの x 成分 S_x および y 成分 S_y の固有値がゼロの状態を表している。(11.16) より，ギャップ関数は

$$\begin{aligned} \hat{\Delta} &= \begin{pmatrix} \Delta_{\uparrow\uparrow} & \Delta_{\uparrow\downarrow} \\ \Delta_{\downarrow\uparrow} & \Delta_{\downarrow\downarrow} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d_x + id_y & d_z \\ d_z & d_x + id_y \end{pmatrix} \\ &= i(\boldsymbol{d}\cdot\sigma)\sigma_y \end{aligned} \tag{11.17}$$

と Pauli 行列 σ を用いて表される。

エネルギー・ギャップ (11.16) の関係式を用いて，固有値に対する (11.12) を変形すると

$$(E^2 - \xi^2)^2 - 2(\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{d}^*)(E^2 - \xi^2) + |(\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{d})|^2 = 0 \tag{11.18}$$

となる。したがって，恒等式 $|(\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{d})|^2 = (\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{d}^*)^2 - |i(\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{d}^*)|^2$ が成り立つことに注意すると固有値は

$$E_\pm^2 = \xi^2 + (\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{d}^*) \pm |i(\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{d}^*)| \tag{11.19}$$

と求まる。特に，$\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{d}^* = 0$ のときには，$\hat{\Delta}$ とそのエルミート共役な行列 $\hat{\Delta}^+$ との積 $\hat{\Delta}\hat{\Delta}^+$ が

$$\hat{\Delta}\hat{\Delta}^+ = (\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{d}^*)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{11.20}$$

と単位行列に比例するようになり，このような状態をユニタリーな状態であるという。このとき固有値は縮退し，$E_+ = E_- = [\xi^2 + (\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{d}^*)]^{1/2}$ である。

$(\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{d}^*) \neq 0$ のとき状態はユニタリーでない。この状態は，$d_z = \Delta_0 = 0$

とおいてみるとその特徴がよくわかる。前にも述べたように弱結合近似では，$\Delta_{\uparrow\downarrow}=\Delta_{\downarrow\uparrow}=\Delta_0=0$ とするとスピン上向き準粒子と下向き準粒子の凝縮状態が独立になり，それぞれ，エネルギー・ギャップ $\Delta_{\uparrow\uparrow}$ と $\Delta_{\downarrow\downarrow}$ を持っていると考えられる。したがって，$i(\boldsymbol{d}(\widehat{\boldsymbol{p}}))\times\boldsymbol{d}^*(\widehat{\boldsymbol{p}})=\frac{1}{2}(|\Delta_{\uparrow\uparrow}(\widehat{\boldsymbol{p}})|^2-|\Delta_{\downarrow\downarrow}(\widehat{\boldsymbol{p}})|^2)$ と書けることに注意すると，Fermi 面上 $\boldsymbol{p}$ の方向でスピンの違う準粒子のギャップの大きさが異なることを意味している。このことは，また Cooper 対がスピン角運動量を持った状態であるため，強磁性的性質を持った状態であるともいうことができる。$\Delta_0\neq 0$ としても，同様の性質を持ち，興味深い状態である。しかし，超流動 ^{3}He では磁場がかかっていない場合には，ユニタリー状態と比較して，非ユニタリー状態はエネルギーが高く，$\boldsymbol{d}$ が空間的に一様ないわゆるバルク状態としては存在しないことが知られている。

ギャップ方程式　対の状態がユニタリーであれば，Bogoliubov 変換は簡単になる。三重項状態での Bogoliubov 変換は，一般的には (11.11) の行列を対角化するような

$$
\begin{aligned}
a_{\boldsymbol{p}\alpha}&=\sum_{\alpha'}(u^*_{\boldsymbol{p}\alpha\alpha'}\alpha_{\boldsymbol{p}\alpha'}-v_{\boldsymbol{p}\alpha\alpha'}\alpha^+_{-\boldsymbol{p}\alpha'})\\
a^+_{-\boldsymbol{p}\alpha}&=\sum_{\alpha'}(v^*_{\boldsymbol{p}\alpha\alpha'}\alpha_{\boldsymbol{p}\alpha'}+u_{\boldsymbol{p}\alpha\alpha'}\alpha^+_{-\boldsymbol{p}\alpha'})
\end{aligned}
\tag{11.21}
$$

というユニタリー変換である。ここで，$\alpha^+_{\boldsymbol{p}\alpha},\alpha_{\boldsymbol{p}\alpha}$ は固有エネルギー $E_\alpha(\boldsymbol{p})$ を持つ Bogoliubov 準粒子の生成，消滅演算子である。$E_+(\boldsymbol{p})=E_-(\boldsymbol{p})=E_{\boldsymbol{p}}$ であるユニタリー状態では (11.13) を拡張した Bogoliubov 変換係数を

$$
\begin{aligned}
u_{\boldsymbol{p}\alpha\alpha'}&=\frac{(E_{\boldsymbol{p}}+\xi_{\boldsymbol{p}})\delta_{\alpha,\alpha'}}{[(E_{\boldsymbol{p}}+\xi_{\boldsymbol{p}})^2+|\Delta_t(\widehat{\boldsymbol{p}})|^2]^{1/2}}\\
v_{\boldsymbol{p}\alpha\alpha'}&=\frac{\Delta_{\alpha\alpha'}(\widehat{\boldsymbol{p}})}{[(E_{\boldsymbol{p}}+\xi_{\boldsymbol{p}})^2+|\Delta_t(\widehat{\boldsymbol{p}})|^2]^{1/2}}
\end{aligned}
\tag{11.22}
$$

とすれば，

$$
E_{\boldsymbol{p}}\alpha_{\boldsymbol{p}\alpha}=[\alpha_{\boldsymbol{p}\alpha},H],\qquad -E_{\boldsymbol{p}}\alpha^+_{-\boldsymbol{p}\alpha}=[\alpha^+_{-\boldsymbol{p}\alpha},H]
$$

が成立することを (11.11) の固有値方程式を直接代入して確かめることができる。ただし，$|\Delta_t(\widehat{\boldsymbol{p}})|^2=(\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{d}^*)$ また $E^2_{\boldsymbol{p}}=\xi^2_{\boldsymbol{p}}+|\Delta_t|^2$ である。

ギャップ方程式は (11.8) 式から求めることができる。Bogoliubov 変換 (11.21), (11.22) を (11.8) に代入し，Bogoliubov 準粒子の分布関数を Fermi 分布関数

$$\langle \alpha^{+}_{\boldsymbol{p}\alpha}\alpha_{\boldsymbol{p}\alpha}\rangle = n(E_{\boldsymbol{p}}) = \frac{1}{e^{\beta E_{\boldsymbol{p}}}+1}$$

とすると，ギャップ方程式は，

$$\Delta_{\alpha\alpha'}(\widehat{\boldsymbol{p}}) = {\sum_{\boldsymbol{p}'}}' g_{\widehat{\boldsymbol{p}},\widehat{\boldsymbol{p}}'} \frac{\Delta_{\alpha\alpha'}(\widehat{\boldsymbol{p}}')}{2E_{\boldsymbol{p}'}}(1-2n(E_{\boldsymbol{p}'})) \tag{11.23}$$

となる。

ギャップ方程式 (11.23) は一般的には $E_{\boldsymbol{p}'}$ がギャップを通して $\boldsymbol{p}'$ の方向に依存するため$\Delta_{\alpha\alpha'}(\widehat{\boldsymbol{p}})$ に関する非線形な積分方程式である。しかし，転移温度 $T_{\rm c}$ を求めるときには $E_{p'}$ においてギャップをゼロとおくので式は線形になる。系が等方的であるときは，$g_{\widehat{\boldsymbol{p}},\widehat{\boldsymbol{p}}'}$ を $\widehat{\boldsymbol{p}},\widehat{\boldsymbol{p}}'$ を変数とした球面調和関数を用いて，

$$g_{\widehat{\boldsymbol{p}},\widehat{\boldsymbol{p}}'} = \sum_l g_l(2l+1)P_l(\widehat{\boldsymbol{p}}\cdot\widehat{\boldsymbol{p}}') = \sum_l g_l \sum_m Y_{lm}(\widehat{\boldsymbol{p}})Y^*_{lm}(\widehat{\boldsymbol{p}}') \tag{11.24}$$

と展開すると明らかなように$\Delta^{(l,m)}_{\alpha\alpha'}Y_{lm}(\widehat{\boldsymbol{p}})$ がギャップ方程式の解になる。このとき，$m=l,l-1,\cdots,-l$ の $2l+1$ 個の解が同じ転移温度を持つ。転移温度 $T^{(l)}_{\rm c}$ は (11.23) を少し変形して，

$$1 = N(0)g_l\int_0^{\varepsilon_{\rm c}}\frac{d\xi}{\xi}\tanh\frac{\xi}{2k_{\rm B}T^{(l)}_{\rm c}} \tag{11.25}$$

から求まる。(11.25) 式は 1S での転移温度を与える (10.35) 式と同じ形をしている。したがって，

$$k_{\rm B}T^{(l)}_{\rm c} \simeq 1.14\varepsilon_{\rm c}\exp\left(-\frac{1}{N(0)g_l}\right) \tag{11.26}$$

となる。

$T^{(l)}_{\rm c} > T$ では非線形の効果は重要である。非線形項により l,m の違ったギャップ関数 $\Delta^{(l,m)}_{\alpha\alpha'}$ が結合する。しかし (11.26) 式からわかるように $T^{(l)}_{\rm c}$ の g_l への依存の仕方から考えて，異なる l に対する転移温度の違いは大変大きいものと思われる。したがって，異なる l 間の結合はほとんど無視してよい。実際，超流動 ^{3}He では $l=1$ の P 波状態が最も高い転移温度を持ち，弱い引力が働いている F 波も P 波の状態に少し混っていると考えられているが，特にその効果が問題になるとき以外は無視できる。

3P 状態　上述の議論から超流動 ^{3}He で，ギャップ関数 $\Delta_{\alpha\alpha'}(\widehat{\boldsymbol{p}})$ が $l=1$ の固有関数 $Y_{1m}(\widehat{\boldsymbol{p}})$ $(m=1,0,-1)$ の線形結合で書けることがわかった。したがって，(11.16) で導入したベクトル $\boldsymbol{d}(\widehat{\boldsymbol{p}})$ も $\widehat{\boldsymbol{p}}$ 方向の単位ベクト

ル $\widehat{\boldsymbol{p}} = (\sin\theta_p \cos\varphi_p, \sin\theta_p \sin\varphi_p, \cos\theta_p)$ を用いて，

$$d_\mu(\widehat{p}) = \sum_i d_{\mu i}\widehat{p}_i \tag{11.27}$$

のように表すことができる。ただし，ここでも $Y_{1,\pm1} = \mp i\sqrt{3/8\pi}(\widehat{p}_x \pm i\widehat{p}_y)$, $Y_{1,0} = i\sqrt{3/4\pi}\widehat{p}_z$ であることを用いた。$d_{\mu i}$ は三重項 P 波状態 (3P) を特徴づける秩序変数で，超流動 ^{4}He や 1S の超伝導では 1 個の複素パラメーターで状態が表現できたのに対して，$3 \times 3 = 9$ 個の複素パラメーターが必要になる。また，$d_{\mu i}$ はスピン空間での回転に対して μ 成分が三次元ベクトルとして変換することはすでに述べたが，i 成分も実空間での回転に対して同じく三次元ベクトルとして変換する。

内部自由度を持つ 3P 超流動状態と内部自由度を持たない超流動 ^{4}He や 1S 超伝導状態との大きな違いの一つは，超流動 ^{4}He や 1S 超伝導では，いわゆるバルクの状態 (流れのない) がただ 1 つしか存在しなかったのに対して，3P 状態では，$3 \times 3 \times 2 = 18$ 個の自由度のためいろいろな状態が存在するということである。すなわち，$d_{\mu i}$ の空間変化を考えなくても，9 個の複素量 $d_{\mu i}$ をどのように選ぶかによってさまざまな状態が考えられる。すでに述べたように，それらすべての状態は転移温度 T_c ではエネルギーが縮退している。しかし，$T_c > T$ では非線形結合によりその縮退が解け，自由エネルギーを最小にする状態が実現している。それは対称性の高い状態と考えられ，次にそのような状態のいくつかを紹介する。ただし，後で述べるスピン状態と軌道状態を結び付ける弱い双極子相互作用を無視すると，$d_{\mu i}$ をスピン空間と実空間での回転させてもそのエネルギーは変化しない。以下にあげる状態にもその縮退が残っている。

BW 状態　R.Balian と N.R.Werthamer[5)] によって最初に考えられた状態で，すべてのスピンと軌道の自由度を使った最も対称性のよい状態である。$d_{\mu i}$ を μ を横に i を縦にとった行列で表示すると

$$d_{\mu i} = \varDelta_{\mathrm{B}}\delta_{\mu i} = \varDelta_{\mathrm{B}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{11.28}$$

と書ける。このとき，ギャップは $\boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{d}^* = |\varDelta_{\mathrm{B}}|^2 \sum_i (\widehat{p}_i)^2 = |\varDelta_{\mathrm{B}}|^2$ となり，1S 状態と同じように Fermi 面の全面で一定のギャップが開いた等方的な状態である。11·1 図の相図に現れる B 相はこの BW 状態であると考えられて

いる。

(11.28) はスピンと軌道状態を同じだけ回転させても秩序変数は変化しない。軌道状態に対してスピンを回転させると BW 状態の一般的な表式

$$d_{\mu i} = \Delta_{\mathrm{B}} R_{\mu i} \tag{11.29}$$

が得られる。ただし，$R_{\mu i}$ は回転行列であり，回転行列の性質 $\sum_{\mu} R_{\mu i} R_{\mu j} = \delta_{ij}$ の関係を使えば，(11.29) のギャップは，(11.20) より

$$|\Delta(\widehat{\boldsymbol{p}})^2| = \boldsymbol{d}^*(\widehat{\boldsymbol{p}}) \cdot \boldsymbol{d}(\widehat{\boldsymbol{p}}) = |\Delta_{\mathrm{B}}|^2 \sum_{\mu,i,j} R_{\mu i} \widehat{p}_i R_{\mu j} \widehat{p}_j = |\Delta_{\mathrm{B}}|^2$$

と方向によらず一定となり，確かに BW 状態である。

ABM 状態　Anderson と Morel[6] により最初に指摘された状態で，

$$d_{\mu i} = (\widehat{\boldsymbol{z}})_{\mu} (\widehat{\boldsymbol{x}} + i \widehat{\boldsymbol{y}})_i = \Delta_{\mathrm{A}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{11.30}$$

と書ける。このとき

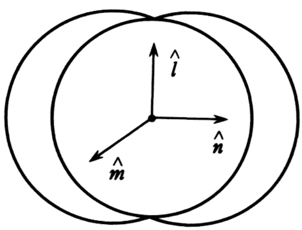
$$|\Delta(\widehat{\boldsymbol{p}})|^2 = \boldsymbol{d}^*(\widehat{\boldsymbol{p}}) \cdot \boldsymbol{d}(\widehat{\boldsymbol{p}}) = |\Delta_{\mathrm{A}}|^2 (\widehat{p}_x^2 + \widehat{p}_y^2) = |\Delta_{\mathrm{A}}|^2 \sin^2 \theta_p \tag{11.31}$$

となり，$\theta_p = 0$ と $\theta_p = \pi$ の Fermi 面上，南極と北極に対応する点でギャップがゼロになる非等方的な状態である。11·1 図の相図における A 相の超流動状態はこの ABM 状態にあると考えられている。

(11.30) をスピンおよび実空間で回転させると

$$d_{\mu i} = \Delta_{\mathrm{A}} (\widehat{\boldsymbol{d}})_{\mu} (\widehat{\boldsymbol{m}} + i \widehat{\boldsymbol{n}})_i \tag{11.32}$$

と一般的な ABM 状態の秩序変数が得られる。ただし，$\widehat{\boldsymbol{z}}$ は回転し，$\widehat{\boldsymbol{d}}$ となり，$\widehat{\boldsymbol{d}}$ はスピン状態を示す単位ベクトルで，定義から $\widehat{\boldsymbol{z}}$ が $S_z = 0$ の状態であることからわかるように，$\widehat{\boldsymbol{d}}$ 方向のスピン成分がゼロの Cooper 対で



11·6 図　ABM 状態でのエネルギー・ギャップおよび秩序変数 $(\widehat{l}, \widehat{m}, \widehat{n})$.

あることを表している。また，$\widehat{\boldsymbol{m}}, \widehat{\boldsymbol{n}}$ はそれぞれ $\widehat{\boldsymbol{x}}$ および $\widehat{\boldsymbol{y}}$ が回転した単位ベクトルで軌道状態を表しており，$\widehat{\boldsymbol{m}} \perp \widehat{\boldsymbol{n}}$ である。$\widehat{\boldsymbol{l}} = \widehat{\boldsymbol{m}} \times \widehat{\boldsymbol{n}}$ と $\widehat{\boldsymbol{l}}$ ベクトルを導入すると，11·6 図のように $\widehat{\boldsymbol{l}}$ はエネルギー・ギャップが消える方向を示すベクトルである。ABM 状態の特徴の一つは，BW 状態と違って，Fermi 面上のすべての状態が $\widehat{\boldsymbol{d}}$ で与えられる一定のスピン状態になることである。

また，磁場がかかったとき転移点近傍に現れる A_1 状態は，

$$d_{\mu i} = \frac{\Delta}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{11.33}$$

というユニタリーでない状態で，上向きまたは下向きスピンのいずれか一方が Fermi 面で A 相と同じギャップを持ち，他方はギャップがゼロという状態である。

以上がバルクの超流動 ^{3}He で実際に存在する状態であるが，その他にもいくつかの対称性がよい状態が考えられる。

Planer 状態

$$d_{\mu i} = \Delta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{11.34}$$

この状態も A 相同様ギャップが南極と北極でゼロになっている。

Polar 状態

$$d_{\mu i} = \Delta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{11.35}$$

このとき $\boldsymbol{d}(\widehat{\boldsymbol{p}}) \cdot \boldsymbol{d}^*(\widehat{\boldsymbol{p}}) = |\Delta|^2 \widehat{p}_z^2 = |\Delta|^2 \cos^2 \theta_p$ となり，ギャップが Fermi 面上 $\theta_p = \pi/2$ の赤道に沿った線上でゼロになる状態である。

Planer 状態や Polar 状態は例えば超流動 ^{3}He の容器の壁に近い所とか，渦の芯近傍に現れる状態であると考えられている。また，重い電子系 $\mathrm{UPt_3}$ の超伝導状態が Polar 状態である可能性も指摘されているが，これはまだ研究が進行中である。

11–3　A 相，B 相の物理的性質

最初に熱力学的性質について考えてみよう。超流動相での熱力学量を計算するにはエネルギー・ギャップの温度変化を知る必要があるが，強結合の効果が無視できない超流動 ^{3}He では，ギャップの温度変化を正しく計算するのは難しい。しかし，転移点近傍とギャップの温度変化が無視できる十分低温では計算は簡単になる。まず転移点近傍に注目し，弱結合近傍での Ginzburg-Landau 自由エネルギーを考えよう。弱結合近似をしたときの G-L 自由エネルギーの表示は，スピン空間での回転に対して不変なスカラー量で

$$F_s = F_n - \alpha \left\langle \sum_{\mu} |d_\mu(\hat{\boldsymbol{p}})|^2 \right\rangle + \frac{\beta}{2} \left[\left\langle \left(\sum_{\mu} |d_\mu(\hat{p})|^2 \right)^2 \right\rangle + \sum_{\mu\nu} \{ \langle |d_\mu(\hat{\boldsymbol{p}})|^2 |d_\nu(\hat{\boldsymbol{p}})|^2 \rangle - \langle (d_\mu^*(\hat{\boldsymbol{p}}))^2 (d_\nu(\hat{\boldsymbol{p}}))^2 \rangle \} \right] \quad (11.36)$$

と書くことができる。ただし

$$\alpha = N(0) \frac{T_c - T}{T_c}, \quad \beta = \frac{7\zeta(3)}{8} \frac{N(0)}{(\pi k_B T_c)^2}$$

である。ここで三角カッコは，ギャップ関数 $d_\mu(\hat{\boldsymbol{p}})$ が $\boldsymbol{p}$ の方向に依存するため，$\boldsymbol{p}$ での積分で立体角 $d\Omega_p$ での積分が残り，たとえば $\langle |d_\mu(\hat{\boldsymbol{p}})|^2 \rangle = (4\pi)^{-1} \int d\Omega_p |d_\mu(\hat{\boldsymbol{p}})|^2$ など Fermi 面上での平均値を表す。

(11.36) の表式は 1S での G-L 自由エネルギーの表式 (10.44) から簡単に導ける。$S_z = 0$ の成分 $\Delta_{\uparrow\downarrow} = 0$ の特別な場合を考えると，弱結合近似ではスピン上向きの準粒子と下向きの準粒子の凝縮状態は独立した状態になる。したがって，自由エネルギーは 2 つの凝縮状態の和として，(10.44) 式より

$$F_s = F_n - \frac{\alpha}{2} \left[\langle |\Delta_{\uparrow\uparrow}(\hat{\boldsymbol{p}})|^2 + |\Delta_{\downarrow\downarrow}(\hat{\boldsymbol{p}})|^2 \rangle \right] + \frac{\beta}{4} \left[\langle |\Delta_{\uparrow\uparrow}(\hat{\boldsymbol{p}})|^4 \rangle + \langle |\Delta_{\downarrow\downarrow}(\hat{\boldsymbol{p}})|^4 \rangle \right] \quad (11.37)$$

となる†。

† (11.37) 式で，ギャップの 2 次と 4 次の係数が (10.44) の表式の 1/2 になっている。(10.44) では，エネルギーが縮退した 2 つの準粒子についての和がとられている。

$\Delta_{\uparrow\uparrow} = -d_x + id_y, \Delta_{\downarrow\downarrow} = d_x + id_y$ を (11.37) 式に代入すると，

$$F_s = F_n - \alpha\left[\langle|d_x(\widehat{\boldsymbol{p}})|^2\rangle + \langle|d_y(\widehat{\boldsymbol{p}})|^2\rangle\right] + \frac{\beta}{2}\left[(\langle|d_x(\widehat{\boldsymbol{p}})|^2\rangle + \langle|d_y(\widehat{\boldsymbol{p}})|^2\rangle)^2 + 2\langle|d_x(\widehat{\boldsymbol{p}})|^2|d_y(\widehat{\boldsymbol{p}})|^2\rangle - \langle(d_x^*(\widehat{\boldsymbol{p}}))^2(d_y(\widehat{\boldsymbol{p}}))^2\rangle - \langle(d_y^*(\widehat{\boldsymbol{p}}))^2(d_x(\widehat{\boldsymbol{p}}))^2\rangle\right]$$

となるが，この表式を$\Delta_{\uparrow\downarrow}(\widehat{\boldsymbol{p}}) = d_z(\widehat{\boldsymbol{p}}) \neq 0$ として x, y, z について対称にしたのが (11.36) 式である。

エネルギー・ギャップ　(11.36) から転移点近傍でのギャップの大きさが求まる。ユニタリー状態では4次の項のうち，第2項と第3項の和がゼロになるので計算は簡単になる。$\langle(\widehat{p}_x)^2\rangle = 1/3, \langle(\widehat{p}_x)^4\rangle = 1/5, \langle(\widehat{p}_x - \widehat{p}_y)^2\rangle = 1/15$ などを用いて，自由エネルギーを計算し，最後に Δ で変分をとり，ギャップの大きさを決める。BW 状態では秩序変数が (11.28)，すなわち $d_\mu(\widehat{\boldsymbol{p}}) = \Delta_{\mathrm{B}}(T)\widehat{p}_\mu$，したがって Fermi 面の全面で等方的なギャップ$\Delta_{\mathrm{B}}(T)$が開く。その大きさは

$$\Delta_{\mathrm{B}}(T) = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \left(\frac{8\pi^2}{7\zeta(3)}\right)^{1/2} k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{c}}\left(1 - \frac{T}{T_{\mathrm{c}}}\right)^{1/2} \simeq 3.06k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{c}}\left(1 - \frac{T}{T_{\mathrm{c}}}\right)^{1/2} \tag{11.38}$$

である。このとき，自由エネルギーは

$$\Delta F_s = F_s - F_n = -\frac{\alpha^2}{2\beta} = -N(0)\frac{4\pi^2k_{\mathrm{B}}^2T_{\mathrm{c}}^2}{7\zeta(3)}\left(1 - \frac{T}{T_{\mathrm{c}}}\right)^2 \tag{11.39}$$

となる。(11.38)，(11.39) は 1S 状態での (10.45)，(10.46) とまったく同じである。

一方，ABM 状態では (11.30) すなわち $d_z(\widehat{\boldsymbol{p}}) = \Delta_{\mathrm{A}}(T)(\widehat{p}_x + i\widehat{p}_y)$, $d_x(\widehat{\boldsymbol{p}}) = d_y(\widehat{\boldsymbol{p}}) = 0$ と与えられ，ギャップは非等法的で$\Delta_{\mathrm{A}}(T)\sin\theta_p$ となるが，

$$\Delta_{\mathrm{A}}(T) = \sqrt{\frac{5}{4}}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \simeq 3.42k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{c}}\left(1 - \frac{T}{T_{\mathrm{c}}}\right)^{1/2} \tag{11.40}$$

また，このとき

$$\Delta F_s = -\frac{5}{12}\frac{\alpha^2}{\beta} = -\frac{5}{6}N(0)\frac{4\pi^2k_{\mathrm{B}}^2T_{\mathrm{c}}^2}{7\zeta(3)}\left(1 - \frac{T}{T_{\mathrm{c}}}\right)^2 \tag{11.41}$$

となる。したがって，弱結合近似においては，等方的なギャップを持つ BW 状態の方が ABM 状態より低い自由エネルギーを持っている。また，Planer 状態や Polar 状態と比較しても BW 状態の方が低い自由エネルギーを持ち，

(11.36) の自由エネルギーでは BW 状態が最も安定した状態であることを示している。

比　熱　準粒子は Fermi 統計に従い，そのエネルギーは (11.19) と与えられるので，系のエントロピーは (10.37) と同じように

$$S = -k_{\rm B}\sum_{\boldsymbol{p},\alpha}\left[\ln\{1-n(E_{\boldsymbol{p}\alpha})\} - \frac{E_{\boldsymbol{p}\alpha}}{k_{\rm B}T}n(E_{\boldsymbol{p}\alpha})\right] \qquad (11.42)$$

となる。

したがって，$E_{p+} = E_{p-}$ とギャップ関数がユニタリーのときには (10.39) を用いて比熱が求まる。特に，BW 状態では 1S とまったく同じ表式になり，常流動状態から二次転移するときの比熱のとびは (10.47) で与えられたように

$$\frac{\Delta C}{C_n(T_{\rm c})} = \frac{12}{7\zeta(3)} \simeq 1.43 \qquad (11.43)$$

となる。また，低温での比熱も (10.40) と同じで

$$C \simeq 2(2\pi)^{1/2}N(0)k_{\rm B}\Delta_0\left(\frac{\Delta_0}{k_{\rm B}T}\right)^{3/2}e^{-\frac{\Delta_0}{k_{\rm B}T}} \qquad (11.44)$$

と温度変化は主に $\exp(-\Delta_0/k_{\rm B}T)$ で決まる。

ABM 状態でも，(10.39) 式から比熱が求められるが，転移点近傍であれば，(11.41) 式から求める方が簡単である。常流動状態から二次転移するときの比熱のとびは，

$$\frac{\Delta C}{C_n(T_{\rm c})} = \frac{10}{7\zeta(3)} \simeq 1.19 \qquad (11.45)$$

となる。また，$T \to 0$ のとき$\Delta_{\rm A}(T) \to \Delta_0$ とすると，準粒子のエネルギーは

$$E_{\boldsymbol{p}+} = E_{\boldsymbol{p}-} = \sqrt{\xi_{\boldsymbol{p}}^2 + \Delta_0^2\sin^2\theta_{\boldsymbol{p}}} \qquad (11.46)$$

となり，$\Delta_0 \gg k_{\rm B}T$ が成り立つ十分低温で励起されているのは，$\theta_{\rm p} = 0$ および π 近傍 $\Delta\theta_{\rm p} \simeq k_{\rm B}T/\Delta_0$ の範囲の準粒子のみとなる。したがって，常流動状態に比べて $(k_{\rm B}T/\Delta_0)^2$ だけ励起されている準粒子の数が減り，比熱は T^3 に比例することになる。(11.46) を (10.39) に代入して計算すると

$$C(T) = \frac{7\pi^2}{5}\left(\frac{k_{\rm B}T}{\Delta_0}\right)^2 C_n(T) \qquad (11.47)$$

が得られる。

スピン帯磁率　スピン三重項状態での帯磁率の計算は一重項状態と比較すると，少しめんどうである。それは帯磁率がスピン状態を表す $\boldsymbol{d}(\widehat{\boldsymbol{p}})$ ベクトルに依存するが，さらに BW 状態のように $\boldsymbol{d}(\widehat{\boldsymbol{p}}) \propto (\sin\theta_p \cos\varphi_p, \sin\theta_p \sin\varphi_p, \cos\theta_p)$ と Fermi 面上で $\boldsymbol{d}$ ベクトルが変化する場合もあり注意を要する。そこでまず，(10.29) のようにスピン状態が Fermi 面上で変化しない ABM 状態での帯磁率を計算し，その結果を用いて BW 状態の帯磁率を求める。計算は弱結合近似を用いて行う。

ABM 状態の $\boldsymbol{p}$ の方向によらないスピン状態を (11.32) のようにベクトル $\widehat{\boldsymbol{d}}$ で表すと，$\widehat{\boldsymbol{d}}$ に対して外部磁場 $\boldsymbol{H}_0$ をどの方向にかけるかによって帯磁率が異なる。それは，磁化 M を $M_i = \chi_{ij} H_{0j}$ と書くと，χ_{ij} を対角化したとき $\widehat{\boldsymbol{d}}$ に垂直な成分 $\chi_\perp$ と平行成分 $\chi_{/\!/}$ が異なることを意味する。

まず，最初に $\boldsymbol{H}_0 \perp \widehat{\boldsymbol{d}}$，すなわち，磁場の方向 z をスピンの量子化軸にとると $\widehat{d}_z = 0$ $(\Delta_{\uparrow\downarrow} = 0)$ となる場合を考える。磁場 $\boldsymbol{H}_0$ がかかると，固有値方程式 (11.11) において ξ_p が $\xi_p - \sigma\mu_0 H_0$ $(\sigma = \pm 1)$ で置き換えられるが，このとき $\Delta_{\uparrow\downarrow} = 0$ なので上向きと下向きスピンの凝縮状態は独立になる。また，(11.22) の Bogoliubov 変換も $u_{\boldsymbol{p}\uparrow\uparrow}, v_{\boldsymbol{p}\uparrow\uparrow}$ と $u_{\boldsymbol{p}\downarrow\downarrow}, v_{\boldsymbol{p}\downarrow\downarrow}$ のみがあり，それぞれ ξ_p を上と同じように置き換えればよい†。したがって，

$$M = \mu_0 \sum_{\boldsymbol{p}} (\langle a^+_{\boldsymbol{p}\uparrow} a_{\boldsymbol{p}\uparrow} \rangle - \langle a^+_{\boldsymbol{p}\downarrow} a_{\boldsymbol{p}\downarrow} \rangle) \tag{11.48}$$

において

$$\langle a^+_{\boldsymbol{p}\sigma} a_{\boldsymbol{p}\sigma} \rangle = |u_{\boldsymbol{p}\sigma\sigma}|^2 n(E_{\boldsymbol{p}\sigma}) + |v_{\boldsymbol{p}\sigma\sigma}|^2 [1 - n(E_{\boldsymbol{p}\sigma})] \tag{11.49}$$

ただし，

$$E^2_{\boldsymbol{p}\sigma} = \xi^2_{\boldsymbol{p}\sigma} + |\Delta_{\sigma\sigma}|^2, \quad \xi_{\boldsymbol{p}\sigma} = \xi_{\boldsymbol{p}} - \sigma\mu_0 H_0$$

と計算され，

$$M = \mu_0 \sum_{\boldsymbol{p}} \left(\frac{\xi_{\boldsymbol{p}+}}{E_{\boldsymbol{p}+}} \tanh \frac{E_{\boldsymbol{p}+}}{2k_{\rm B}T} - \frac{\xi_{\boldsymbol{p}-}}{E_{\boldsymbol{p}-}} \tanh \frac{E_{\boldsymbol{p}-}}{2k_{\rm B}T} \right)$$

となる。上式より，$H_0 \to 0$ とおいて帯磁率に対する表式

$$\chi_\perp = \lim_{H_0 \to 0} \frac{M}{H_0} = -2\mu_0^2 N(0) \int d\xi \frac{d}{d\xi} \left[\frac{\xi}{E_{\boldsymbol{p}}} \tanh \frac{E_{\boldsymbol{p}}}{2k_{\rm B}T} \right] = \chi_n \tag{11.50}$$

---

† ξ_p を $\xi_p - \sigma\mu_0 H_0$ で置きかえても状態密度 $N(E)$ の E 依存を無視すれば，ギャップ関数 $\Delta_{\uparrow\uparrow}, \Delta_{\downarrow\downarrow}$ は変化せず，ユニタリーのままである。

を得る。このように $\boldsymbol{H}_0 \perp \widehat{\boldsymbol{d}}$ ときには帯磁率は常流動状態から変化しないことが示された。

次に $\boldsymbol{H}_0 /\!/ \widehat{\boldsymbol{d}}$ の場合を考える。$\Delta_{\uparrow\uparrow} = \Delta_{\downarrow\downarrow} = 0$ であれば，(11.11) において，ξ_p を $\xi_p - \sigma\mu_0 H_0$ で置きかえたときの解は，$E_{\boldsymbol{p}\pm} = E_{\boldsymbol{p}} \mp \mu_0 H_0, E_{\boldsymbol{p}} = \sqrt{\xi_{\boldsymbol{p}}^2 + |\Delta_{\uparrow\downarrow}|^2}$ である。また，このとき，Bogoliubov 変換は，$H_0 = 0$ のときのままでよいこともわかる。したがって，1S の場合の帯磁率の計算を参考にして

$$\chi_{/\!/} = -2\mu_0^2 \sum_{\boldsymbol{p}} \frac{dn(E_{\boldsymbol{p}})}{dE_{\boldsymbol{p}}} \tag{11.51}$$

を得る。ただし，(11.51) 式で $E_{\boldsymbol{p}}$ が$\Delta_{\uparrow\downarrow}(\widehat{\boldsymbol{p}})$ により，$\boldsymbol{p}$ の方向に依存しているため，

$$Y(\widehat{\boldsymbol{p}}, T) = \int_0^\infty d\xi_p \left(-\frac{dn(E_{\boldsymbol{p}})}{dE_{\boldsymbol{p}}}\right) \tag{11.52}$$

と (10.51) の芳田関数 $Y(T)$ を拡張すると (11.51) は $Y(\widehat{\boldsymbol{p}}, T)$ を Fermi 面上で積分して

$$\chi_{/\!/} = \chi_n \langle Y(\widehat{\boldsymbol{p}}, T)\rangle_{\widehat{\boldsymbol{p}}} \tag{11.53}$$

と表される。 (11.50) と (11.53) を組合せて， ABM 状態の帯磁率の一般式は

$$\chi_{\mu\nu} = \chi_n\{\delta_{\mu\nu} - \widehat{d}_\mu \widehat{d}_\nu (1 - \langle Y(\widehat{\boldsymbol{p}}, T)\rangle_{\widehat{\boldsymbol{p}}})\} \tag{11.54}$$

と与えられる。ただし，磁場のエネルギーが $-(1/2)\chi_{\mu\nu}H_{0\mu}H_{0\nu}$ であることを考えると，バルク状態のように $\widehat{\boldsymbol{d}}$ ベクトルが自由に回転できる状態では $\widehat{\boldsymbol{d}} \perp \boldsymbol{H}_0$ と $\widehat{\boldsymbol{d}}$ ベクトルは (11.54) の $\chi_{\mu\nu}$ をなるべく大きくするような状態をとる。そのような状況では帯磁率はいつも χ_n が観測されることになる。

ABM 状態での結果を$\widehat{\boldsymbol{d}}$ が $\widehat{\boldsymbol{p}}$ の方向によって変化する場合へと拡張するのは容易である。Fermi 面上 $\widehat{\boldsymbol{p}}$ 方向の Cooper 対の帯磁率への寄与を考えると，それは，(11.54) で立体角の積分をとる前に $\widehat{\boldsymbol{d}}$ を $\boldsymbol{d}(\widehat{\boldsymbol{p}})$ で置き換えたものになるであろう。したがって，一般の状態での帯磁率は，

$$\chi_{\mu\nu} = \chi_n \langle \delta_{\mu\nu} - \widehat{\boldsymbol{d}}_\mu(\widehat{\boldsymbol{p}})\widehat{\boldsymbol{d}}_\nu(\widehat{\boldsymbol{p}})(1 - Y(\widehat{\boldsymbol{p}}, T))\rangle_{\widehat{\boldsymbol{p}}} \tag{11.55}$$

で与えられることになる。ただし $\widehat{d}(\widehat{\boldsymbol{p}})$ は $\boldsymbol{d}(\widehat{p})$ 方向の単位ベクトルである。特に $Y(\widehat{\boldsymbol{p}}, T)$ が $\widehat{\boldsymbol{p}}$ の方向によらない BW 状態での帯磁率は

$$\chi_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}\chi_n \left(1 - \frac{1}{3}(1 - Y(T))\right) \tag{11.56}$$

である。温度 $T=0$ では $Y(T)=0$ となり，BW 状態の帯磁率は常流動状態の 2/3 の帯磁率が低温で残っていることになる。これは $(\uparrow,\downarrow)$ 対の帯磁率は低温でゼロになるが，$(\uparrow,\uparrow)$ 対，$(\downarrow,\downarrow)$ 対の帯磁率は χ_n のままであることを反映している。しかし，実際の超流動 ^{3}He では Fermi 液体での相互作用の効果を取り入れることが重要で，Landau パラメーター F_0^a を用いて (11.56) の表式は，

$$\chi_{\mu\nu}=\delta_{\mu\nu}\chi_n\frac{2+Y(T)}{3+F_0^a[2+Y(T)]} \tag{11.57}$$

と修正される。したがって，$T=0$ で $2/(3+2F_0^a)$ の帯磁率が残っていることになる。その様子を 11·3 図に示した。F_0^a に実験から得られた値を代入すると，11·3 図の測定結果とよい一致がみられる。

スピンゆらぎと ABM 状態の安定化　自由エネルギー (11.39) と (11.41) の比較から結論したように弱結合近似から得られた自由エネルギー (11.36) では ABM 状態と比較して BW 状態のエネルギーがいつも低くなる。では，なぜ実際には高温高圧の領域に ABM 状態が現れるのであろうか。このことを説明するには弱結合近似では落としている効果を取り入れる必要がある。どのような効果を取り入れたらよいかを考える鍵はスピンゆらぎを媒介にした Cooper 対の相互作用 (11.6) と ABM および BW 状態での帯磁率の表式，(11.54) と (11.56) にある。スピンゆらぎを媒介にした相互作用はスピンゆらぎが凝縮を起こす準粒子自身のゆらぎであるため，対凝縮が起こり帯磁率が変化すると変化する。このことは，フォノンを媒介にした引力により起こる通常の超伝導ではフォノンは対凝縮によってほとんど影響をうけないことから考慮されなかった強結合の効果である。BW 状態では，等方的な帯磁率が対凝縮とともに減少するのに対して，ABM 状態では方向によっては対凝縮で変化しない帯磁率があることからも，この強結合効果は ABM 状態に有利にはたらくであろうことは見当がつく。この問題を以下に具体的に検討する。

スピンを媒介にした相互作用は，(11.6) から，

$$\langle\alpha\beta|V_{sf}|\beta'\alpha'\rangle=-J\chi_{ij}(\sigma_i)_{\alpha\alpha'}(\sigma_j)_{\beta\beta'} \tag{11.58}$$

と与えられる。ただし，$J=(f_0^a/\mu_0)^2$ である。いま，ABM 状態として，$\boldsymbol{d}$ ベクトル $\boldsymbol{d}\,/\!\!/\,\hat{z}$ の状態を考えることにすると帯磁率は，(11.54) より

$$\chi_{xx}=\chi_{yy}=\chi_n>\chi_{zz} \tag{11.59}$$

である。(11.58) の相互作用は σ_i に対する表式 (11.4) を用いて計算され，

$(\uparrow,\uparrow)$ 対，$(\downarrow,\downarrow)$ 対では

$$\langle\uparrow\uparrow|V_{sf}|\uparrow\uparrow\rangle = \langle\downarrow\downarrow|V_{sf}|\downarrow\downarrow\rangle = -J\chi_{zz} \tag{11.60}$$

$(\uparrow,\downarrow)$ 対すなわち $|z\rangle = 1/\sqrt{2}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)$ では

$$\langle z|V_{sf}|z\rangle = -J(\chi_{xx} + \chi_{yy} - \chi_{zz}) \tag{11.61}$$

となる。したがって，BW 状態では (11.56) から $\chi_{xx} = \chi_{yy} = \chi_{zz} < \chi_n$ を考慮すると，対凝縮が起これぱスピンゆらぎはおさえられて，誘起される引力は弱くなる。一方，$\boldsymbol{d} /\!/ \hat{\boldsymbol{z}}$ の ABM 状態では，(11.59) の関係があり (11.61) よりこの状態に対する引力はかえって大きくなる。これが ABM 状態での対凝縮によるフィード・バック効果である。

フィード・バック効果により ABM 状態が安定になるのを実際に示したのは，Anderson と Brinkman[7]である。彼らはスピンゆらぎの効果を取り入れて，G-L 自由エネルギーの 4 次の係数を計算し，ABM 状態の自由エネルギーが BW 状態より低くなるときもあることを示した。弱結合近似で計算された自由エネルギー (11.36) に 3P 状態の秩序変数 (11.27) を代入し，角度積分を行うと $d_{\mu i}$ による自由エネルギーの表式が得られる†。得られた表式はスピン・軌道相互作用を無視しているので，実空間およびスピン空間での回転に対して不変な形をしている。自由エネルギーが秩序変数の位相に依存しないことは明らかなので 2 次の項は $d_{\mu i}$ と $d^*_{\nu j}$ の組合せからできているが，スピンおよび実空間の回転に対して不変なのは $-\alpha d^*_{\mu i}d_{\mu i}$ しかない (以後同じ指標については和をとることにする)。同様の議論から 4 次の項の一般形が求まる。4 次の項は $d_{\mu i}$ と $d^*_{\nu j}$ 2 つずつの組合せからできているがこのときは不変な形が 5 種類ある。結局，一般的な G-L 自由エネルギーは，

$$\begin{aligned}\Delta F_s = &-\alpha d^*_{\mu i}d_{\mu i}\\ &+\beta_1 d^*_{\mu i}d^*_{\mu i}d_{\nu j}d_{\nu j} + \beta_2 d^*_{\mu i}d_{\mu i}d^*_{\nu j}d_{\nu j}\\ &+\beta_3 d^*_{\mu i}d^*_{\nu i}d_{\mu j}d_{\nu j} + \beta_4 d^*_{\mu i}d_{\nu i}d^*_{\nu j}d_{\mu j}\\ &+\beta_5 d^*_{\mu i}d_{\nu i}d_{\nu j}d^*_{\mu j}\end{aligned} \tag{11.62}$$

である。先の弱結合近似 (11.36) では，

† 先にも述べたが $d_{\mu i}$ においてμ がスピン状態，i が軌道状態を表す指標である。

$$\alpha = \frac{1}{3}N(0)\left(1 - \frac{T}{T_c}\right), \quad -2\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = -\beta_5$$

$$-\beta_1 \equiv \beta_0 = \frac{7N(0)\zeta(3)}{240(\pi k_B T)^2} \tag{11.63}$$

となる。

Anderson と Brinkman により計算された強結合の補正はスピンゆらぎの強さを表すパラメーターδ を用いて表され，β_i は次のように与えられた。

$$\beta_1 = -(1 + 0.1\delta)\beta_0, \quad \beta_2 = (2 + 0.2\delta)\beta_0$$

$$\beta_3 = (2 - 0.05\delta)\beta_0\ , \quad \beta_4 = (2 - 0.55\delta)\beta_0 \tag{11.64}$$

$$\beta_5 = -(2 + 0.7\delta)\beta_0,$$

したがって，BW 状態 $d_{\mu i} = \Delta_B \delta_{\mu i}$ での自由エネルギーは

$$\Delta F_s = -3\alpha|\Delta_B|^2 + 3(3\beta_{12} + \beta_{345})|\Delta_B|^4$$

となる。ただし，$\beta_{12} = \beta_1 + \beta_2$，$\beta_{345} = \beta_3 + \beta_4 + \beta_5$，以下同様の表式を用いる。これから，

$$|\Delta_B|^2 = \frac{\alpha}{2(3\beta_{12} + \beta_{345})} \tag{11.65}$$

このとき

$$\Delta F_s = -\frac{3\alpha^2}{2(3\beta_{12} + \beta_{345})} = -\frac{\alpha^2}{2\beta_0}\frac{1}{\left(\frac{5}{3} - 0.33\delta\right)} \tag{11.66}$$

である。

一方，$d_{xx} = \Delta_A, d_{xy} = i\Delta_A$ 他の成分は $d_{\alpha i} = 0$ の ABM 状態では

$$\Delta F_s = 2\alpha|\Delta_A|^2 + 4\beta_{245}|\Delta_A|^4$$

したがって，

$$|\Delta_A|^2 = \frac{\alpha}{4\beta_{245}} \tag{11.67}$$

$$\Delta F_s = -\frac{\alpha^2}{2\beta_{245}} = -\frac{\alpha^2}{2\beta_0}\frac{1}{(2 - 1.05\delta)} \tag{11.68}$$

となる。(11.66) と (11.68) から $3\beta_{12} + \beta_{345} > 3\beta_{245}$ すなわち$\delta > 0.46$ では ABM 状態が低い自由エネルギーを持つようになる。このようにして，スピンゆらぎの大きい高温高圧の領域に ABM 状態が出現する。

11–4 スピンの運動，NMR

NMR を用いた超流動 ^{3}He の研究[4),8),9)] は理論と実験が互いに刺激し合って進歩し，この特異な超流動相の性質を明らかにしていく上で大変重要な役割を果たした。しかし，この相でのスピンの運動の研究は，Osheroff 達[10)] によって，A 相での NMR 共鳴周波数に (11.1) で与えたように $\omega^2 = \omega_L^2 + \Omega^2(T)$ という，常流動状態にはない，Larmor 周波数 ω_L からの大きなシフト $\Omega(T)$ が観測されてから，初めて注目されるようになり，超流動発見以前にもたくさんあった超流動相についての理論研究のなかには NMR に関するものは皆無であった。それは，Ω_0 のシフトの原因が Cooper 対の構造に密接に結びついているので，発見後には超流動相の性質の解明に大変役に立ったが，反面発見前からこの現象を予想するのは困難であったためと思われる。

超流動相での NMR のシフトの原因を考えるとき，その出発点として次のことに注意しておく必要がある。もし系の相互作用が交換相互作用のような系の全スピン S とその成分を保存するような相互作用であったとする。そのような場合にはスピン状態に関係した系のエネルギーは，外場 $H_0 = 0$ のときの S のみで決まる相互作用のエネルギーに，$H_0 \neq 0$ では S の磁場方向の成分に関係した Zeeman エネルギー，$-\mu_0 S_z H_0$ が加わるだけである。したがって，NMR の共鳴周波数は S_z が± 1 だけ変化する $\omega_L = \mu_0 H_0/\hbar$ に厳密に等しくなる。このことからシフト Ω の原因はスピンを保存しない相互作用，^{3}He の系では双極子相互作用であろうということになる。さらに，シフト Ω を説明するためには外部磁場がゼロでも ^{3}He のスピンに何らかの有効磁場がはたらいていなければならないが，その磁場の大きさは転移点より十分低温では $\Omega \sim 100$kHz 程度になるという実験結果から考えて，30 ガウス程度にまでなると推測される。一方，^{3}He 原子の双極子相互作用の大きさは ^{3}He 液体中の隣合った 2 つのスピン間で，10^{-7}K 程度，1 個の ^{3}He 原子が隣りの原子に及ぼす磁場はせいぜい 1 ガウス程度にしかならないということを考えると，Ω が非常に大きなシフトであることがわかる。

ではなぜ超流動状態ではそのような大きなシフトが現れるか。常流動状態ではスピン状態は常磁性で，スピンは勝手な方向を向いている (スピン空間で回転対称な状態)。したがって，^{3}He スピンにはたらく他の原子の双極子モーメントによる磁場は平均化するとその 1 次では消えてしまい，残

るのは2次以上の小さな量である。常流動状態でのシフトは大変小さい。一方，超流動相では，例えばABM状態では秩序変数 (11.32) よりわかるようにスピン空間での対称性を破って対が凝縮したコヒーレント状態であり，双極子相互作用による磁場もコヒーレントにはたらくと考えられる。結果的には双極子相互作用は凝縮状態でのスピンと軌道状態を結合させて，NMRの共鳴周波数に大きなシフトを引き起こす。

双極子相互作用　スピンの密度演算子

$$\frac{1}{2}\sigma(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2}\psi_\alpha^+(\boldsymbol{r})\sigma_{\alpha\beta}\psi_\beta(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}} a_{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}\alpha}^+\sigma_{\alpha\beta}a_{\boldsymbol{p}\beta}e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{11.69}$$

を用いて，^{3}He準粒子間の双極子相互作用は，

$$H_D = \frac{1}{2}(\mu_0)^2\int d^3r\int d^3r'\left\{\frac{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} -3\,\frac{[\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{r})\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')][\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{r}')\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')]}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^5}\right\} \tag{11.70}$$

と表される。したがって，運動量表示では

$$H_D = \frac{1}{2}(\mu_0)^2\sum_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}',\boldsymbol{q}} Q_{\mu\nu}(\widehat{\boldsymbol{q}})(\sigma_\mu)_{\alpha\delta}(\sigma_\nu)_{\beta\gamma}\, a_{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}\alpha}^+ a_{\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{q}\beta}^+ a_{\boldsymbol{p}'\gamma}a_{\boldsymbol{p}\delta} \tag{11.71}$$

である。ただし，

$$Q_{\mu\nu}(\widehat{\boldsymbol{q}}) = \int d^3r\,\frac{e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}}}{r^3}(\delta_{\mu\nu}-3\widehat{r}_\mu\widehat{r}_\nu) = -\frac{4\pi}{3}(\delta_{\mu\nu}-3\widehat{q}_\mu\widehat{q}_\nu) \tag{11.72}$$

$\widehat{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}/|r|$, $\widehat{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{q}/|q|$ を導入した。

対凝縮状態でのスピン軌道相互作用は，(11.71) の H_D を分子場近似して求められる。

$$E_D = \langle H_D\rangle = \frac{1}{2}(\mu_0)^2\int\frac{d\Omega_p}{4\pi}\int\frac{d\Omega_{p'}}{4\pi}Q_{\mu\nu}(\widehat{\boldsymbol{q}})(\sigma_\mu)_{\alpha\delta}(\sigma_\nu)_{\beta\gamma} \sum_{|\boldsymbol{p}|}\langle a_{-\boldsymbol{p}\alpha}^+ a_{\boldsymbol{p}\beta}^+\rangle\sum_{|\boldsymbol{p}'|}\langle a_{\boldsymbol{p}'\gamma}a_{-\boldsymbol{p}'\delta}\rangle \tag{11.73}$$

このとき $\widehat{\boldsymbol{q}} = (\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')/|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'|$ は $\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'$ がFermi面近傍にあるという条件から $|\boldsymbol{p}|,|\boldsymbol{p}'|$ には依存しないことを用いている。

(11.73)式の計算を最初に $|\boldsymbol{p}|,|\boldsymbol{p}'|$ についての積分から実行しよう。(11.21), (11.22) を用いると，

$$\sum_{|\boldsymbol{p}|}\langle a_{\boldsymbol{p}\alpha}a_{-\boldsymbol{p}\beta}\rangle = -\sum_{|\boldsymbol{p}|}\frac{\Delta_{\alpha\beta}(\widehat{\boldsymbol{p}})}{2E_{\boldsymbol{p}}}(1-2n(E_{\boldsymbol{p}}))$$
$$= -i(\sigma_\mu\sigma_y)_{\alpha\beta}d_\mu(\widehat{\boldsymbol{p}})\sum_{|\boldsymbol{p}|}\frac{1-2n(E_{\boldsymbol{p}})}{2E_{\boldsymbol{p}}} \qquad (11.74)$$

となる。ここで (11.17) を用いた。(11.74) における積分はギャップ方程式 (11.23) でも取り扱った積分で，弱結合近似を用いると簡単にその大きさが評価できる。

$$I(\widehat{\boldsymbol{p}},T) = \sum_{|\boldsymbol{p}|}\frac{1-2n(E_{\boldsymbol{p}})}{2E_{\boldsymbol{p}}} = N(0)\int_{-\varepsilon_c}^{\varepsilon_c} d\xi_p \frac{1-2n(E_{\boldsymbol{p}})}{2E_{\boldsymbol{p}}} \qquad (11.75)$$

を導入すると，転移温度近傍では (11.26) を参考にして，

$$I(\widehat{\boldsymbol{p}},T_c) \simeq N(0)\ln\frac{1.14\varepsilon_c}{T_c} \equiv I \qquad (11.76)$$

となる。一方，$T\to 0$ での積分値は，(11.76) の T_c を低温でのギャップの大きさ$\Delta(\widehat{\boldsymbol{p}})$ で置きかえたものになり，$\widehat{\boldsymbol{p}}$ に依存している。しかし，その依存は対数的であり，無視できると考え$\Delta(\widehat{\boldsymbol{p}})$ をその Fermi 面上での平均値 $\langle\Delta(\widehat{\boldsymbol{p}})\rangle$ で置きかえて $I(\widehat{\boldsymbol{p}},0)$ を評価すると，その大きさは (11.77) の I とほとんど同じになる。したがって，以後一般の温度でも $I(\widehat{\boldsymbol{p}},T)$ を (11.76) の I で近似することにする。

$$\sum_{|\boldsymbol{p}|} = \langle a_{\boldsymbol{p}\alpha}a_{-\boldsymbol{p}\beta}\rangle = -iI(\sigma_\mu\cdot\sigma_y)_{\alpha\beta}d_\mu(\widehat{\boldsymbol{p}}) \qquad (11.77)$$

したがって，(11.73) は，

$$E_D = \frac{1}{2}\mu_0^2 I^2\iint\frac{d\Omega_p}{4\pi}\frac{d\Omega_{p'}}{4\pi}Q_{\mu\nu}(\widehat{\boldsymbol{p}})(\sigma_\mu)_{\alpha\delta}(\sigma_\nu)_{\beta\gamma}$$
$$(\sigma_y\sigma_{\mu'})_{\alpha\beta}d^*_{\mu'}(\widehat{\boldsymbol{p}})(\sigma_{\nu'}\sigma_y)_{\gamma\delta}d_{\nu'}(\widehat{\boldsymbol{p}}') \qquad (11.78)$$

となる。(11.78) での Pauli 行列の計算

$$(\sigma_\mu)_{\alpha\delta}(\sigma_y\sigma_{\mu'}\sigma_\nu\sigma_{\nu'}\sigma_y)_{\alpha\delta} = \mathrm{Tr}(\sigma_\mu^T\sigma_y\sigma_{\mu'}\sigma_\nu\sigma_{\nu'}\sigma_y)$$

は σ_μ の置換行列 σ_μ^T は $\sigma_y\sigma_\mu^T\sigma_y = -\sigma_\mu$ であること，さらに Pauli 行列の積のトレース Tr は

$$\mathrm{Tr}(\sigma_\mu\sigma_{\mu'}\sigma_\nu\sigma_{\nu'}) = 2(\delta_{\mu\mu'}\delta_{\nu\nu'} - \delta_{\mu\nu}\delta_{\mu'\nu'} + \delta_{\mu\nu'}\delta_{\mu'\nu})$$

であることを用いて実行できる。(11.72) を代入して，

$$E_D = \frac{2\pi}{3}(2\mu_0)^2 I^2 \iint \frac{d\Omega_p}{4\pi}\frac{d\Omega_{p'}}{4\pi} \{\boldsymbol{d}^*(\widehat{\boldsymbol{p}})\cdot\boldsymbol{d}(\widehat{\boldsymbol{p}}') - 3[\boldsymbol{d}^*(\widehat{\boldsymbol{p}})\cdot\widehat{\boldsymbol{q}}][\boldsymbol{d}(\widehat{\boldsymbol{p}}')\cdot\widehat{\boldsymbol{q}}]\} \tag{11.79}$$

が得られる。最後に立体角についての積分は次に示すように実行できる。$d_\mu(\widehat{\boldsymbol{p}})$ がP波成分のみを含んでいる場合には，$d_\mu(\widehat{\boldsymbol{p}}) = \sum_i d_{\mu i}\widehat{p}_i$ とおいて，(11.79) に代入すると第1項はゼロになり，第2項から

$$S_{\mu\nu ij} = \iint \frac{d\Omega_p}{4\pi}\frac{d\Omega_{p'}}{4\pi}\widehat{q}_\mu\widehat{q}_\nu\widehat{p}_i\widehat{p}'_j \tag{11.80}$$

という量がでてくる。$S_{\mu\nu ij}$ は対称性から，

$$S_{\mu\nu ij} = A\delta_{\mu\nu}\delta_{ij} + B(\delta_{\mu i}\delta_{\nu j} + \delta_{\mu j}\delta_{\nu i}) \tag{11.81}$$

となることは明らかである。また，$S_{\mu\nu ij}$ は (11.80) より

$$\sum_\mu S_{\mu\mu ij} = 0, \quad \sum_{\mu\nu} S_{\mu\nu\mu\nu} = -\frac{1}{2} \tag{11.82}$$

となることが導ける。ただし，第2式では，$|\boldsymbol{p}| \simeq |\boldsymbol{p}'| \simeq p_{\rm F}$

$$(\widehat{\boldsymbol{q}}\cdot\widehat{\boldsymbol{p}})(\widehat{\boldsymbol{q}}\cdot\widehat{\boldsymbol{p}}') = \frac{[(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\cdot\boldsymbol{p}][(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\cdot\boldsymbol{p}']}{|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'|^2 p_{\rm F}^2} = -\frac{1}{2}[1-(\widehat{\boldsymbol{p}}\cdot\widehat{\boldsymbol{p}}')]$$

であることを用いた。

(11.81) を (11.82) に代入して，$A = 1/30$, $B = -1/20$ これから

$$\begin{aligned} E_D &= \frac{2N(0)\lambda_D}{5}\left[d^*_{\mu\mu}d_{\nu\nu} + d^*_{\mu\nu}d_{\nu\mu} - \frac{2}{3}d^*_{\mu\nu}d_{\mu\nu}\right] \\ &= 2N(0)\lambda_D\int\frac{d\Omega_p}{4\pi}[3\cdot|\widehat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{d}(\widehat{\boldsymbol{p}})|^2 - |\boldsymbol{d}(\widehat{\boldsymbol{p}})|^2] \end{aligned} \tag{11.83}$$

が得られる†。

ただし，

$$N(0)\lambda_D = \frac{\pi}{4}(2\mu_0)^2\left(N(0)\ln 1.14\frac{\varepsilon_{\rm c}}{T_{\rm c}}\right)^2 \tag{11.84}$$

である。

得られた相互作用の大きさは $d_{\mu i} \sim |\Delta|$ として，

$$N(0)\lambda_D|\Delta|^2 \sim (N(0))^2\mu_0^2|\Delta|^2 \sim n\frac{\mu_0^2}{a^3}\frac{|\Delta|^2}{\varepsilon_{\rm F}^2}$$

---

† 二番目の等式では $(4\pi)^{-1}\int d\Omega_p p_\mu p_\nu p_{\mu'} p_{\nu'} = (1/15)(\delta_{\mu\nu}\delta_{\mu'\nu'} + \delta_{\mu\mu'}\delta_{\nu\nu'} + \delta_{\mu\nu'}\delta_{\mu'\nu})$ を用いる。

と状態密度 $N(0) \sim n/\varepsilon_{\rm F}$ の粒子密度 n を粒子間距離 a で書きかえると解釈しやすくなる。μ_0^2/a^3 は準粒子間の双極子相互作用の大きさ，$|\Delta|^2/\varepsilon_{\rm F}^2$ は2個の準粒子がCooper対を形成している確率を表わしており，物理的にもっともらしい結果である。また $\mu_0^2/a^3 \sim 10^{-7}$K から$\lambda_D \sim 10^{-7}$ したがって(11.62)のΔF_s で与えられた対の凝縮エネルギーに比べて E_D は非常に小さく，これが双極子相互作用を摂動として取り扱ってよい理由である。

磁場中での平衡状態　BW状態とABM状態にはそれぞれ秩序変数が(11.29)，(11.32)で与えられるようなスピンおよび実空間の回転についての縮退があった。双極子相互作用は非常に小さな相互作用ではあるが，マクロな数の粒子対が凝縮している状態を問題にするため，双極子相互作用の寄与もマクロな量となり，その縮退が解ける。平衡状態は(11.83)の E_D を最小にする状態になる。NMRを考えるにあたって，磁場中でのABM状態，BW状態での平衡状態を求めておこう。

まず，ABM状態，$d_{\mu i} = \Delta_{\rm A}(\widehat{\boldsymbol{d}})_\mu(\widehat{\boldsymbol{m}} + i\widehat{\boldsymbol{n}})_i$ から考える。磁場によるエネルギーは，(11.54)の帯磁率から

$$E_H = -\frac{1}{2}\delta\chi_{ij}H_iH_j = \frac{1}{2}\delta\chi_s(\widehat{\boldsymbol{d}}\cdot\boldsymbol{H})^2 \tag{11.85}$$

ただし，

$$\delta\chi_s = \chi_n[1 - \langle Y(\widehat{\boldsymbol{p}}, T\rangle_{\widehat{\boldsymbol{p}}}] > 0$$

である。したがって，$\widehat{\boldsymbol{d}} \perp \boldsymbol{H}$ のとき E_H は最小になる。

また双極子エネルギーは(11.83)より，状態によらない項を落として

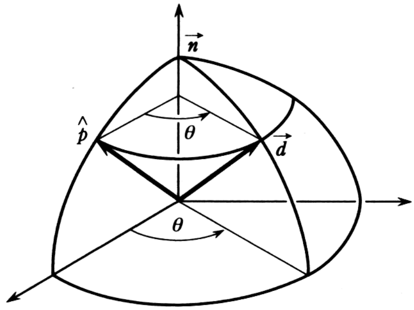
$$\begin{aligned} E_D &= \frac{4}{5}\lambda_D N(0)\Delta_{\rm A}^2[(\widehat{\boldsymbol{m}}\cdot\widehat{\boldsymbol{d}})^2 + (\widehat{\boldsymbol{n}}\cdot\widehat{\boldsymbol{d}})^2] \\ &= -\frac{3}{5}g_D[(\widehat{\boldsymbol{l}}\cdot\widehat{\boldsymbol{d}})^2 - 1] \end{aligned} \tag{11.86}$$

ここで

$$g_D = \frac{4}{3}\lambda_D N(0)\Delta_{\rm A}^2 \tag{11.87}$$

また，$\widehat{m}_i\widehat{m}_j + \widehat{n}_i\widehat{n}_j + \widehat{l}_i\widehat{l}_j = \delta_{ij}$ の関係を用いた。したがって，平衡状態は $\widehat{\boldsymbol{d}} \perp \boldsymbol{H}$ かつ $\widehat{\boldsymbol{d}} /\!/ \widehat{\boldsymbol{l}}$ という状態である。

次に，BW状態について考える。BW状態での秩序変数は $d_\mu(\widehat{\boldsymbol{p}}) = \Delta_{\rm B}\sum_i R_{\mu i}\widehat{\boldsymbol{p}}_i$ と与えられるが，通常，回転行列 $R_{\mu i}$ を回転軸方向の単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ と回転角 θ を用いて，



11·7 図 BW 状態での秩序変数 $\boldsymbol{d}(p)$. $\boldsymbol{d}$ は $\boldsymbol{p}$ を $\boldsymbol{n}$ 軸まわりに角度 θ だけ回転させた状態である。

$$R_{\mu i}(\boldsymbol{n},\theta) = \delta_{\mu i}\cos\theta + (1-\cos\theta)n_\mu n_i - \varepsilon_{\mu ij}n_j\sin\theta \tag{11.88}$$

のように表示すると便利である。ただし，$\varepsilon_{\mu ij}$ は反対称テンソルである。このとき，ベクトル $\boldsymbol{d}(\widehat{\boldsymbol{p}})$ と $\widehat{\boldsymbol{p}}$ の関係を図にすると 11·7 図のようになる。(11.88) より，双極子エネルギー (11.80) は$\sum_\mu R_{\mu\mu}(\boldsymbol{n}\cdot\theta) = 1+2\cos\theta$, $\sum_{\mu\nu} R_{\mu\nu}(\boldsymbol{n},\theta)R_{\nu\mu}(\boldsymbol{n},\theta) = \sum_\mu R_{\mu\mu}(\boldsymbol{n},2\theta) = 1+2\cos 2\theta$ であることを使って

$$E_D = \frac{4}{5}g_D(2\cos^2\theta+\cos\theta) \tag{11.89}$$

と $\boldsymbol{n}$ に依存しない θ のみの関数として求まる。ここで，

$$g_D = 2N(0)\lambda_D|\varDelta_{\rm B}|^2 \tag{11.90}$$

である†。したがって，E_D が最小の値をとるのは

$$\cos\theta_0 = -\frac{1}{4};\quad \theta=\theta_0.\simeq 104^\circ \tag{11.91}$$

のときである。

BW 状態での磁場のエネルギーは帯磁率が (11.56) で与えられるように

† ABM 状態ではギャップの大きさの Fermi 面上での平均値が $\langle|\varDelta(\widehat{\boldsymbol{p}})|^2\rangle = |\varDelta_{\rm A}|^2\langle\sin^2\theta_p\rangle = (2/3)|\varDelta_{\rm A}|^2$ である。(11.87) と (11.90) は $g_D = 2N(0)\lambda_D\langle|\varDelta(\widehat{\boldsymbol{p}})|^2\rangle$ で定義した量と考えればよい。

ABM 状態と違って等方的であるため，このままでは状態に関係したエネルギーにならない。しかし，高次の効果を考えると $\boldsymbol{n}$ ベクトルに依存したエネルギーがでてくる。いま，磁場が z 軸に平行にかかり，$\mu_0 H \ll \Delta_{\mathrm{B}}$ であるとすると，$S_z = 0$ の対すなわち d_z は磁場の影響により小さくなるが，$S_z = \pm 1$ の対 d_x, d_y は影響を受けない ($|d_x| = |d_y| > |d_z|$)。そのようなギャップ関数の変形まで考慮すると，双極子エネルギーがより低いのは d_x, d_y を θ_0 だけ回転した状態であり，それは 11·7 図から考えて $\boldsymbol{n} /\!/ \boldsymbol{H}$ の場合である。このようにして

$$E_H = -a(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{H})^2 \tag{11.92}$$

というエネルギーがでてくる。ただし，a は定数である。(11.92) は (11.89) と比べて $(\mu_0 H/\Delta)^2$ 程度小さな量である。

運動方程式　BW 状態および ABM 状態で秩序変数がスピン空間で回転すると双極子エネルギーが変化することがわかった。では，その秩序変数の運動はどのようにスピンの運動と関係するのか，この問題は Leggett により詳しく調べられた。

Leggett[8] は超流動 ^{3}He でのスピンおよびそれに伴って起こる秩序変数の運動に対して断熱近似が成立するとして半現象論的理論を展開した。実際，NMR で観測されている振動数はだいたい，双極子相互作用によるシフト $\Omega \sim 10^5$Hz 程度であるがこれに対して，エネルギー・ギャップ Δ の大きさは 1mK 程度，振動数にすれば 10^8Hz 程度であり，また準粒子の衝突時間もあまり低温を考えない限り 10^{-8}sec 程度である。したがって，スピンの運動は十分ゆっくりしていって，準粒子の状態はスピンおよび秩序変数が変化しても，いつもそれに対して平衡状態を保つようについていけると考えてよい。これは分子振動における Born-Oppenheimer 近似に対応し，分子振動の問題での原子核の座標に対応するパラメーターがいまの問題では，スピン $\boldsymbol{S}$ および秩序変数 $\boldsymbol{d}(\widehat{\boldsymbol{p}})$ である。

$\boldsymbol{S}$ および $\boldsymbol{d}(\widehat{\boldsymbol{p}})$ の従う運動方程式を次のようにして求められる。まず，$\boldsymbol{S}$ および $\boldsymbol{d}(\widehat{\boldsymbol{p}})$ を演算子と考える。演算子 $\boldsymbol{S}$ は

$$S_\mu = \sum_{\widehat{\boldsymbol{p}}} S_\mu(\widehat{\boldsymbol{p}}), \quad S_\mu(\widehat{\boldsymbol{p}}) = \frac{1}{2} \sum_{|\boldsymbol{p}|,\alpha\beta} a^+_{\boldsymbol{p}\alpha} (\sigma_\mu)_{\alpha\beta} a_{\boldsymbol{p}\beta} \tag{11.93}$$

と定義する。一方，(11.77) を参考にして，演算子 $\boldsymbol{d}(\widehat{\boldsymbol{p}})$ も

$$\sum_{|\boldsymbol{p}|} a_{\boldsymbol{p}\alpha} a_{-\boldsymbol{p}\beta} = -iI(\sigma_\mu \sigma_y)_{\alpha\beta} d_\mu(\widehat{\boldsymbol{p}})$$

から

$$d_\mu(\widehat{p}) = \frac{i}{2} I^{-1} \sum_{|\boldsymbol{p}|,\alpha,\beta} (\sigma_y \sigma_\mu)_{\beta\alpha} a_{\boldsymbol{p}\alpha} a_{-\boldsymbol{p}\beta} \tag{11.94}$$

と定義する。

このように定義された演算子間の交換関係は直接計算できて，

$$\begin{aligned} [S_\mu, S_\nu] &= i\varepsilon_{\mu\nu\lambda} S_\lambda \\ [S_\mu, d_\nu] &= i\varepsilon_{\mu\nu\lambda} d_\lambda \\ [d_\mu(\widehat{\boldsymbol{p}}), d_\nu^*(\widehat{\boldsymbol{p}}')] &= i\frac{\varepsilon_{\mu\nu\lambda}}{I^2} S_\lambda(\widehat{\boldsymbol{p}})[\delta(\widehat{\boldsymbol{p}} - \widehat{\boldsymbol{p}}') + \delta(\widehat{\boldsymbol{p}} + \widehat{\boldsymbol{p}}')] \end{aligned} \tag{11.95}$$

となる。

交換関係 (11.95) を用いれば，$\boldsymbol{S}$ と $\boldsymbol{d}(\widehat{\boldsymbol{p}})$ についての運動方程式

$$\dot{\boldsymbol{S}} = -\frac{i}{\hbar}[\boldsymbol{S}, H], \quad \dot{\boldsymbol{d}}(\widehat{\boldsymbol{p}}) = -\frac{i}{\hbar}[\boldsymbol{d}(\widehat{\boldsymbol{p}}), H] \tag{11.96}$$

が計算できる。ただし，ハミルトニアン H は断熱近似したときのエネルギーで，準粒子が常に $\boldsymbol{S}$ と $\boldsymbol{d}(\widehat{\boldsymbol{p}})$ に対して平衡ということから，$\boldsymbol{S}$ と $\boldsymbol{d}(\widehat{\boldsymbol{p}})$ のみの関数である。

$\boldsymbol{d}(\widehat{\boldsymbol{p}})$ がスピン空間で回転し変化する双極子エネルギー (11.80) の E_D はハミルトニアンとして考慮しなければならないエネルギーであるが，$\boldsymbol{S}$ に依存したエネルギーは熱力学的考察から，

$$E_S = \frac{1}{2}\frac{(2\mu_0)^2}{\chi}(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{S}) - 2\mu_0 \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H} \tag{11.97}$$

が考えられる。E_S の第 2 項は Zeeman エネルギーであり，第 1 項はスピンの交換エネルギーである。係数に含まれる χ が帯磁率であるのは平衡状態での $\boldsymbol{S}$ が，

$$\frac{\partial E_S}{\partial \boldsymbol{S}} = \frac{(2\mu_0)^2}{\chi}\boldsymbol{S} - 2\mu_0 \boldsymbol{H} = 0$$

から決まり，磁荷 $\boldsymbol{M}_0$が

$$2\mu_0 \boldsymbol{S}_0 = \boldsymbol{M}_0 = \chi \boldsymbol{H} \tag{11.98}$$

と与えられることにより確かめられる。

ただし，一般的には χ は (11.55) で与えられ，$\boldsymbol{d}(\widehat{\boldsymbol{p}})$ の関数であり，(11.56) のように等方的である BW 状態では問題はないが，非等方的な ABM 状態では，(11.97) の χ をどのように決めたらよいか注意する必要がある。しかし，この場合でも，$\boldsymbol{S}$ および $\boldsymbol{d}(\widehat{\boldsymbol{p}})$ は $\chi = \chi_\perp$ $(= \chi_n)$ であるような運動

過程を常にたどることが示される (後述)。したがって，少なくとも BW 状態と ABM 状態では (11.97) の E_S を用いてよい。

結局，$\boldsymbol{S}$ および $\boldsymbol{d}(\widehat{\boldsymbol{p}})$ を演算子と考えて，その運動を支配するハミルトニアン H は,

$$H = \frac{1}{2}\frac{(2\mu_0)^2}{\chi}(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{S}) - 2\mu_0\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H} + E_D \tag{11.99}$$

となる。

このハミルトニアンを用いて運動方程式 (11.96) を計算する。$\boldsymbol{S}$ に対する運動方程式は (11.95) の交換関係を使って,

$$\dot{\boldsymbol{S}} = \gamma\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{H} + \boldsymbol{R}_D \tag{11.100}$$

と求まる。ただし，$\gamma = \mu_0/(\hbar/2)$ は ^{3}He 原子の磁気角運動量比で負の値である。また $\boldsymbol{R}_D$ は双極子相互作用によるトルクで (11.83) から

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}_D &= -\frac{1}{\hbar}\int\frac{d\Omega_p}{4\pi}\left[\boldsymbol{d}(\widehat{\boldsymbol{p}})\times\frac{\partial E_D}{\partial\boldsymbol{d}(\widehat{\boldsymbol{p}})} + \mathrm{c.c}\right]\\ &= -\frac{6N(0)\lambda_D}{\hbar}\int\frac{d\Omega_p}{4\pi}\{[\boldsymbol{d}(\widehat{\boldsymbol{p}})\times\widehat{\boldsymbol{p}}][\boldsymbol{d}^*(\widehat{\boldsymbol{p}})\cdot\widehat{\boldsymbol{p}}] + \mathrm{c\,.\,c}\}\end{aligned} \tag{11.101}$$

と計算される。

$\boldsymbol{d}(\widehat{\boldsymbol{p}})$ の運動方程式も同様に

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{d}}(\widehat{\boldsymbol{p}}) &= \gamma\boldsymbol{d}(\widehat{\boldsymbol{p}})\times(\boldsymbol{H} - \gamma\hbar\chi^{-1}\boldsymbol{S})\\ &= -\frac{\gamma^2\hbar}{\chi}\boldsymbol{d}(\widehat{\boldsymbol{p}})\times\boldsymbol{S}'\end{aligned} \tag{11.102}$$

と求まる。ここで $\boldsymbol{S}'$ は

$$\boldsymbol{S}' = \boldsymbol{S} - \frac{\chi\boldsymbol{H}}{\gamma\hbar} = \boldsymbol{S} - \boldsymbol{S}_0 \tag{11.103}$$

である。

(11.102) では E_D からの寄与 $-(i/\hbar)[\boldsymbol{d}(\widehat{\boldsymbol{p}}), E_D]$ は小さいため無視した。実際この項は (11.84) より $N(0)\lambda_D Sd/\hbar I^2$ 程度の量であり，また，(11.102) の右辺第 2 項は $\mu_0^2 Sd/\chi\hbar$ 程度である。$\chi \sim N(0)\mu_0^2$ ((9.29) より) であることから，その比は $\lambda_D \sim 10^{-7}$ となる。

Leggett 方程式　(11.100) と (11.102) は Leggett 方程式とよばれ，超流動 ^{3}He でのスピンの運動を調べるときの基礎になる。まず，ABM 状態での運動方程式から考えよう。このとき問題なのは軌道状態の時間変化，すなわち $\widehat{\boldsymbol{l}}$ ベクトルの時間変化であり，もし $\widehat{\boldsymbol{l}}$ もスピンといっしょに運動す

ると問題はやっかいである。しかし，幸いなことに $\hat{\boldsymbol{l}}$ は非常にゆっくりとしか運動できないことが理論的にも実験的にも確かめられており，スピンが運動する間 $\hat{\boldsymbol{l}}$ はその平衡状態から変化しないと仮定してよい。したがって (11.102) より

$$\dot{\hat{\boldsymbol{d}}} = \gamma\hat{\boldsymbol{d}} \times (\boldsymbol{H} - \gamma\hbar\chi_{\mathrm{A}}^{-1}\boldsymbol{S}) = -\frac{\gamma^2\hbar}{\chi_{\mathrm{A}}}\hat{\boldsymbol{d}} \times \boldsymbol{S}' \tag{11.104}$$

が得られる。また，双極子相互作用によるトルク $\boldsymbol{R}_D$ (11.101) は (11.86) より

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}_D &= -\frac{8N(0)\lambda_D}{5\hbar}|\Delta_{\mathrm{A}}|^2[(\hat{\boldsymbol{d}} \times \hat{\boldsymbol{m}})(\hat{\boldsymbol{d}} \cdot \hat{\boldsymbol{m}}) + (\hat{\boldsymbol{d}} \times \hat{\boldsymbol{n}})(\hat{\boldsymbol{d}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}})] \\ &= \frac{6}{5}\frac{g_D}{\hbar}(\hat{\boldsymbol{d}} \times \hat{\boldsymbol{l}})(\hat{\boldsymbol{d}} \cdot \hat{\boldsymbol{l}}) \end{aligned} \tag{11.105}$$

と計算され，(11.100) は

$$\dot{\boldsymbol{S}} = \gamma\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{H} + \frac{6}{5}\frac{g_D}{\hbar}(\hat{\boldsymbol{d}} \times \hat{\boldsymbol{l}})(\hat{\boldsymbol{d}} \cdot \hat{\boldsymbol{l}}) \tag{11.106}$$

となる。

(11.105) より $\hat{\boldsymbol{d}} \cdot \boldsymbol{R}_D = 0$ であることから，(11.104)，(11.106) を用いて，$d(\hat{\boldsymbol{d}} \cdot \boldsymbol{S})/dt = 0$ が簡単に示される。したがって，平衡状態，$\hat{\boldsymbol{d}} \perp \boldsymbol{S}$ から出発した状態は常に $\hat{\boldsymbol{d}} \perp \boldsymbol{S}$ であることになり，これが ABM 状態でも(11.99) のように $\chi = \chi_\perp$ とおいてよい理由であった。

次に BW 状態での Leggett 方程式を求めよう。まず，双極子トルク $\boldsymbol{R}_D$ は (11.101) と (11.88) より

$$\begin{aligned}R_{D\mu} &= -\frac{4N(0)\lambda_D}{5\hbar}\Delta_{\mathrm{B}}^2\sum_{\nu\lambda\rho}\varepsilon_{\mu\nu\lambda}(R_{\nu\rho}R_{\rho\lambda} + R_{\nu\lambda}R_{\rho\rho}) \\ &= \frac{4g_D}{5\hbar}(1 + 4\cos\theta) \cdot \sin\theta \cdot n_\mu \end{aligned} \tag{11.107}$$

となり，S の運動方程式は

$$\dot{\boldsymbol{S}} = \gamma\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{H} + \boldsymbol{n}\frac{4}{5\hbar}g_D\sin\theta(1 + 4\cos\theta) \tag{11.108}$$

と求まる。平衡状態 $1 + 4\cos\theta_0 = 0$ のときは $\boldsymbol{R}_D = 0$ であり，また $\theta - \theta_0$ が小さいときには

$$\dot{\boldsymbol{S}} = \gamma\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{H} - \frac{3g_D}{\hbar}(\theta - \theta_0)\boldsymbol{n} \tag{11.109}$$

である。

BW 状態で秩序変数は $d_\mu(\widehat{p}) = \varDelta_{\rm B} R_{\mu i}\widehat{p}_i$,すなわち

$$\boldsymbol{d}(\widehat{\boldsymbol{p}}) = \varDelta_{\rm B}[(1-\cos\theta)(\boldsymbol{n}\cdot\widehat{\boldsymbol{p}})\cdot\boldsymbol{n} + \boldsymbol{n}\cos\theta + \sin\theta(\boldsymbol{n}\times\widehat{\boldsymbol{p}})] \quad (11.110)$$

と $\boldsymbol{n}$ とθ で表されている。(11.102) を用いて $\boldsymbol{n}$ と θ に対する運動方程式を導く。まず，(11.110) から

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varDelta_{\rm B}}\dot{\boldsymbol{d}}\,(\widehat{\boldsymbol{p}}) = {}& \dot{\theta}[-\widehat{\boldsymbol{p}}\sin\theta + n(\widehat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{n})\sin\theta + \cos\theta(\boldsymbol{n}\times\widehat{\boldsymbol{p}})] \\ & +\dot{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{n}\cdot\widehat{\boldsymbol{p}})(1-\cos\theta) + \boldsymbol{n}(\dot{\boldsymbol{n}}\cdot\widehat{\boldsymbol{p}})(1-\cos\theta) \\ & +(\dot{\boldsymbol{n}}\times\widehat{\boldsymbol{p}})\sin\theta \end{aligned} \quad (11.111)$$

が求まる。(11.102) の左辺に (11.111) を右辺に (11.110) を代入して得られた方程式の $\widehat{\boldsymbol{p}}$ に並行成分と垂直成分を $(4\pi)^{-1}\int d\Omega_p[\,\widehat{\boldsymbol{p}}\cdot\dot{\boldsymbol{d}}\,(\widehat{\boldsymbol{p}})]$ および $(4\pi)^{-1}\int d\Omega_p[\,\widehat{\boldsymbol{p}}\times\dot{\boldsymbol{d}}\,(\widehat{\boldsymbol{p}})]$ のようにして計算すると†，θ および $\boldsymbol{n}$ についての運動方程式

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \frac{\gamma^2\hbar}{\chi_{\rm B}}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{S}') = -\gamma\boldsymbol{n}\left(\boldsymbol{H} - \frac{\gamma\hbar\boldsymbol{S}}{\chi_{\rm B}}\right) \\ \dot{\boldsymbol{n}} &= -\frac{\gamma^2\hbar}{2\chi_{\rm B}}(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{S}') - \frac{\gamma^2\hbar}{2\chi_{\rm B}}\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)[\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{S}')]\end{aligned} \quad (11.112)$$

が得られる。

スピンの微小振動　ABM 状態での Leggett 方程式が (11.104) と (11.106)，BW 状態では，(11.108) と (11.112) とそれぞれ求まった。これらの式を用いて，平衡状態近傍でのスピンの微小振動を調べてみよう。

最初に ABM 状態から考える。ABM 状態に静磁場 $\boldsymbol{H}_0$ (z 方向) がかかったときの平衡状態は，$\boldsymbol{S}_0 \perp \widehat{\boldsymbol{d}}_0 /\!/ \widehat{\boldsymbol{l}}$ であるので，$\boldsymbol{S}_0 = (\chi H_0/\gamma\hbar)\widehat{\boldsymbol{z}}$ また，$\widehat{\boldsymbol{l}} = \widehat{\boldsymbol{d}}_0 = \widehat{\boldsymbol{x}}$ とおくことができる。このとき，$S_x, S_y, S'_z, \widehat{d}_y, \widehat{d}_z$ は微小量と考えられ，運動方程式で高次の項を落とすと (11.106) は

$$\begin{aligned}\dot{S}_x &= -\omega_L S_y, \quad \dot{S}_y = \omega_L S_x + \frac{6}{5}\frac{g_D}{\hbar}\widehat{d}_z \\ \dot{S}'_z &= -\frac{6}{5}\frac{g_D}{\hbar}\widehat{d}_y\end{aligned} \quad (11.113)$$

また，(11.104) は

---

† 計算では関係式

$$(4\pi)^{-1}\int d\Omega_p(\widehat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{A})(\widehat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{B}) = \frac{1}{3}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}),\ (4\pi)^{-1}\int d\Omega_p(\widehat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{A})(\widehat{\boldsymbol{p}}\times\boldsymbol{B}) = \frac{1}{3}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$$

を用いる。

$$\dot{\hat{d}}_y = \frac{\gamma^2\hbar}{\chi_A}S_z, \quad \dot{\hat{d}}_z = -\frac{\gamma^2\hbar}{\chi_A}S_y \tag{11.114}$$

となる。ここで，$\omega_L = -\gamma H_0$ ($\gamma < 0$) は Larmor 振動数である。したがって，磁場方向の成分 S_z' は$\hat{d}_y$ と結合して振動数，

$$\Omega_A^2 = \frac{6}{5}\frac{\gamma^2}{\chi_A}g_D = \frac{8}{5}\frac{\gamma^2}{\chi_A}\lambda_D N(0)|\Delta_A|^2 \tag{11.115}$$

で振動する。これを縦振動という。また，静磁場に垂直な成分 S_x, S_y は $\hat{d}_z$ と結合し，その運動の振動数は

$$\omega^2 = \omega_L^2 + \frac{6}{5}\frac{\gamma^2 g_D}{\chi_A} = \omega_L^2 + \Omega_A^2 \tag{11.116}$$

である。これを横振動の振動数という。

また，BW 状態の微小振動の振動数も同様にして求まる。BW 状態での平衡状態は $\boldsymbol{S}_0 = (\chi H_0/\gamma\hbar)\hat{\boldsymbol{z}}$, $\theta = \theta_0$ また (11.92) より $\boldsymbol{n} = \hat{\boldsymbol{z}}$ である。S_x, S_y, S_z' を微小量として線形化した (11.109) の運動方程式は

$$\dot{S}_x = -\omega_L S_y, \quad \dot{S}_y = \omega_L S_x, \quad \dot{S}_z = -\frac{3g_D}{\hbar}(\theta - \theta_0) \tag{11.117}$$

となり，$\boldsymbol{S}$ の運動は $\boldsymbol{n}$ と結合しない。そこで $\boldsymbol{n}$ は変化しないとすると (11.112) より

$$\dot{\theta} = \frac{\gamma^2\hbar}{\chi_B}S_z' \tag{11.118}$$

したがって，縦振動の振動数は

$$\Omega_B^2 = \frac{3\gamma^2}{\chi_B}g_D = \frac{6\gamma^2}{\chi_B}\lambda_D N(0)|\Delta_B|^2 \tag{11.119}$$

となり，また横振動の振動数は

$$\omega^2 = \omega_L^2 \tag{11.120}$$

と求まる。

(11.115)，(11.116) は A 相の，そして，(11.119)，(11.120) は B 相での NMR の実験結果と見事に一致し，これが超流動 ^{3}He での Cooper 対の対称性を同定するときのきめ手になった。例えば，A 相での横振動の振動数の実験結果はすでに 11·4 図で見たように，シフト $\Omega^2(T) = \Omega_A^2$ が転移点近傍で $T_c - T$ に比例していたがこれは $|\Delta_A|^2 \propto T_c - T$ から説明され，B 相の横振動にシフトがないのは (11.120) と一致している。さらに，Ω_A の大きさは十分低温で，$\Omega_A \sim 10^2$kHz と観測されているがこれも，$\chi_A \sim N(0)\mu_0^2$ を

用いたあらい評価で，$\Omega_\mathrm{A}^2 \sim \lambda_D|\Delta_\mathrm{A}|^2/(2\pi\hbar)^2$ となり，$|\Delta_\mathrm{A}|/2\pi\hbar \sim 10^8\mathrm{Hz}$ を考慮すれば，観測値と同程度の値が得られる。また，縦振動は，A 相と B 相での振動数の比をとると

$$\left(\frac{\Omega_\mathrm{A}}{\Omega_\mathrm{B}}\right)^2 = \frac{4}{15}\left|\frac{\Delta_\mathrm{A}}{\Delta_\mathrm{B}}\right|^2 \frac{\chi_\mathrm{B}}{\chi_\mathrm{A}} \tag{11.121}$$

となるが，これは A-B 転移近傍の実験で確かめられている。

リンギング　Leggett 方程式，(11.104)，(11.106) および (11.108)，(11.112) は微小振動だけでなく，平衡状態から大きく離れた状態の運動をも記述する。そのような運動について，理論的にも実験的にも詳しい研究がなされている。ここではその中で最も簡単で興味ある現象である A 相でのリンギング (ringing) について紹介する[11]。

いま，A 相で静磁場 $\boldsymbol{H}_0(\,/\!\!/\,\hat{\boldsymbol{z}})$ がかかって平衡になった状態において，急に H_0 の大きさをΔH だけ変化させたとすると，始め $S_z = \chi H_0/\gamma\hbar$ $(S_z' = 0)$ であった状態が，磁場が変化すると間にスピンが変化しないとすると，変化後の平衡状態から測って $S_z' = -\chi\Delta H/\gamma\hbar$ の状態になる。したがって (11.104) より$\hat{\boldsymbol{d}}$ ベクトルは x-y 面内で回転をはじめる。$\hat{\boldsymbol{l}}$ と$\hat{\boldsymbol{d}}$ のなす角を θ とすると

$$\dot{\theta} = \frac{\gamma^2\hbar}{\chi}S_z'$$

となる。一方，S_z' の時間変化は (11.106) より

$$\dot{S}_z' = -\frac{\chi_\mathrm{A}\Omega_\mathrm{A}^2}{\hbar\gamma^2}\sin\theta\cos\theta$$

したがって，$2\theta = \varphi$ とすると運動方程式は

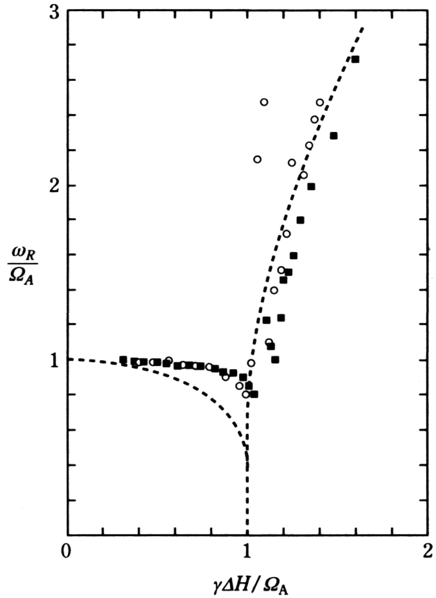
$$\ddot{\varphi} = -\Omega_\mathrm{A}^2\sin\varphi \tag{11.122}$$

となる。また，初期条件は

$$(\dot{\varphi})_0 = -2\gamma\Delta H \tag{11.123}$$

である。(11.122) の運動方程式から重力中の振り子の問題と同等になり，(11.123) はその初期角速度を与える。

リンギングの実験結果を 11·8 図に与える[12]。これは ΔH の関数とし，周期運動の振動数 ω_Rを測定したものである。図が示しているように，ΔH が小さいときには振動数 Ω_A の微小振動を行い，ΔH が大きい極限では (11.123) で与えられる初期振動数 $2\gamma\Delta H$ の等角速度運動に漸近的に近づく。これらの振舞いは実験とよい一致を示している。



11·8 図 リンギング振動数ω_R. 点線は理論値である。

11–5 流体力学と織目構造

超流動相 ^{3}He-B はエネルギー・ギャップが等方的であり，そのため，超流体として示す流体力学的性質も等方的である。その意味では超流動 ^{4}He と同じような流れの性質を持つ。一方，超流動 ^{3}He-A は $\hat{l}$ ベクトルの方向でエネルギー・ギャップが消える非等方的であり，流れの性質も非等方的になる。また，$\boldsymbol{l}$ ベクトルが空間的に変化することで流れが生じるというように超流動 ^{4}He とは違った新しい性質を持つ。この節ではこのような超流動 ^{3}He の流体としての性質を考察するとともに，秩序変数の空間変化，例えば $\boldsymbol{l}$ ベクトルの空間変化に伴って現れる織目構造†(texture) についてもみてみよう。

前節までの議論では秩序変数が空間的に変化しない場合を主に取り上げてきた。しかし，すでにみてきたように超流動 ^{4}He で流れが存在するとき

† 織目構造とは例えば $\hat{l}$ の空間変化を図に描くと織目のようにみえる。したがって $\hat{l}$ の空間変化によってできる構造のことを $\hat{l}$ texture という。

には秩序変数の位相が空間変化していた。このように流れが存在する状況では超流動 ^{3}He でも秩序変数の空間変化が問題になる。秩序変数の空間変化を以下 G-L 理論を用いて議論する。

グラディエント・エネルギー　空間変化にともなう G-L 自由エネルギー，いわゆるグラディエント・エネルギー (gradient energy) は弱結合近似を用いれば簡単に求めることができる。まず，ここでは対称性を用いた考察から一般的にはどのような形のグラディエント・エネルギーが存在するかということから議論を始めよう。グラディエント・エネルギーは，$\nabla_i d_{\mu j}$ と $\nabla_i d^*_{\mu j}$ を必ず含むが，空間変化が十分ゆっくりしているときには，微分について最低次の項を考えればよい。回転に対して ∇_i は実空間でのベクトルとして変換することを考慮すれば，グラディエントの最低次で，スピンおよび実空間での回転に対して不変な項として次の三つの項が考えられる。

$$F_G = K_1 \nabla_i d^*_{\mu j} \nabla_i d_{\mu j} + K_2 \nabla_i d^*_{\mu j} \nabla_j d_{\mu i} + K_3 \nabla_i d^*_{\mu i} \nabla_j d_{\mu j} \tag{11.124}$$

ここで，K_i は転移点近傍では秩序変数によらない係数で，弱結合近似においては，

$$K_1 = K_2 = K_3 = K_0 \equiv \frac{1}{5} N(0) \xi_0^2, \quad \xi_0 = \left[\frac{7\xi(3)}{48\pi^2}\right]^{1/2} \frac{\hbar v_f}{k_\mathrm{B} T_\mathrm{c}} \tag{11.125}$$

と計算されている。ξ_0 は温度零度でのコヒーレンス長 (超流動 ^{4}He での回復長に対応する) で融解圧力近くでは $\xi_0 \sim 120$Å 程度である。

グラディエント・エネルギー F_G に対して (11.62) で与えられ G-L エネルギー ΔF_s は凝縮エネルギーといわれる。$F_\mathrm{G} \sim \Delta F_s$ となるような空間変化にともなった特徴的な長さとして，G-L 領域 (転移点近傍) でのコヒーレンス長 ξ が定義され

$$\xi = \xi_0 \left(1 - \frac{T}{T_\mathrm{c}}\right)^{-1/2} \tag{11.126}$$

となる。ところで，流体力学で記述するのは秩序変数の空間変化が ξ に比べて十分ゆっくりしている場合 ($\Delta F_s \gg F_\mathrm{G}$) である。この状況を 1S の場合と同様に London 極限とよぶ。London 極限ではまず，ΔF_s を最小にするという条件から　状態は BW 状態とか ABM 状態とかに制限される。したがって，BW 状態では，秩序変数を位相 φ を考慮して

$$d_{\mu i} = \Delta_\mathrm{B} e^{i\varphi} R_{\mu i}(\hat{\boldsymbol{n}}, \theta) \tag{11.127}$$

また，ABM 状態では

$$d_{\mu i} = \Delta_{\rm A} \hat{d}_\mu (\hat{\boldsymbol{m}} + i\hat{\boldsymbol{n}})_i, \quad \hat{\boldsymbol{l}} = \hat{\boldsymbol{m}} \times \hat{\boldsymbol{n}} \tag{11.128}$$

と書いたときの$\Delta_{\rm B}$ と$\Delta_{\rm A}$ は変化しないとして，残る自由度についての空間変化が流体力学を考えているとき問題になる。

超流動の運動量密度　超流動の流れにともなう運動量密度 (質量の流れ密度) を求めるとき，BW 状態，ABM 状態ともに London 極限でもいくつかの自由度が残り，また，特に ABM 状態では，l ベクトルの空間変化が超流動流を生じるということもあって注意を要する。超流動にともなう運動量密度 $\boldsymbol{j}_s$ は，凝縮系全体を微小速度 $\boldsymbol{u}$ で動かしたとき，すなわち微小速度 $\boldsymbol{u}$ の Galilei 変換により凝縮系のエネルギーが $F_s \rightarrow F_s + \boldsymbol{j}_s \cdot \boldsymbol{u}$ と変化することから求められる。上述の Galilei 変換により一体の波動関数は $\psi(\boldsymbol{r}) \rightarrow \psi(\boldsymbol{r}) \exp(im\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{r}/\hbar)$ と変化し，そのため対の秩序変数も $d_{\mu i}(\boldsymbol{r}) \rightarrow d_{\mu i}(\boldsymbol{r}) \exp(i2m\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{r}/\hbar)$ と変換される。したがってこの変換により，(11.124) 式のグラディエント・エネルギーは，$\nabla d_{\mu i} \rightarrow (\nabla + i2m\boldsymbol{u}/\hbar) d_{\mu i}$ の置き換えに対応する変化を受けることに注意すれば，$\boldsymbol{j}_s$ は $\boldsymbol{j}_s = \partial F_{\rm G}/\partial \boldsymbol{u}|_{\boldsymbol{u}=0}$ から

$$j_{si} = \frac{4m}{\hbar} {\rm Im}[\, K_1 d^*_{\mu j} \nabla_i d_{\mu j} + K_2 d^*_{\mu j} \nabla_j d_{\mu i} + K_3 d^*_{\mu i} \nabla_j d_{\mu j}] \tag{11.129}$$

と求まる。

(11.129) 式を用いて BW 状態，ABM 状態での $\boldsymbol{j}_s$ が具体的にどのように与えられるかみてみよう。まず，初めに BW 状態を考える。BW 状態の秩序変数は (11.127) 式で与えられる。(11.127) 式を (11.129) 式に代入すると $\nabla\theta$ と $\nabla\hat{\boldsymbol{n}}$ の項は消えて，弱結合近似 (11.125) を成立するとき

$$\boldsymbol{j}_s = 10 K_0 |\Delta_{\rm B}|^2 \frac{2m}{\hbar} \nabla\varphi \tag{11.130}$$

となる。^{3}He 対の質量が $2m$ であることから，超流動速度を $\boldsymbol{v}_{\rm s} = \hbar/2m \cdot \nabla\varphi$ とすると

$$\boldsymbol{j}_{\rm s} = \rho_s \boldsymbol{v}_s, \quad \rho_s = \left(\frac{2m}{\hbar}\right)^2 10 K_0 |\Delta_{\rm B}|^2 \tag{11.131}$$

と，エネルギー・ギャップが等方的であることを反映して，超流動密度も等方的になる。なお，このように $\hat{\boldsymbol{n}}$ と θ の空間変化は質量流とは関係がない。その意味で $\hat{\boldsymbol{n}}$ と θ は前節で示したようにスピン関係した自由度である。

次にABM状態での運動密度を考えよう。ABM状態の秩序変数は(11.128)で与えられ，スピン状態を表す$\widehat{\boldsymbol{d}}$と軌道状態を表す互いに直交する3つの組の単位ベクトル$\widehat{\boldsymbol{l}}, \widehat{\boldsymbol{m}}, \widehat{\boldsymbol{n}}$ (triadとよばれる)で指定される。いま，秩序変数に$e^{-i\varphi}$をかけ，位相を変化させたとすると

$$(\widehat{\boldsymbol{m}} + i\widehat{\boldsymbol{n}})e^{-i\varphi} = \widehat{\boldsymbol{m}}' + i\,\widehat{\boldsymbol{n}}'$$

から

$$\widehat{\boldsymbol{m}}' = \widehat{\boldsymbol{m}}\cos\phi + \widehat{\boldsymbol{n}}\sin\phi, \quad \widehat{\boldsymbol{n}}' = -\widehat{\boldsymbol{m}}\sin\phi + \widehat{\boldsymbol{n}}\cos\phi$$

と変換され，この位相の変化はtriadの$\widehat{\boldsymbol{l}}$軸まわりの回転と考えることができる。そして，位相の微小変化を考えると$\delta\widehat{\boldsymbol{n}} = \widehat{\boldsymbol{m}}\delta\phi$. したがって

$$\nabla_i\phi = \widehat{m}_j\nabla_i\widehat{n}_j \quad (= -\widehat{n}_j\nabla\widehat{m}_j)$$

と求まり，これから超流動速度を

$$v_{si} = \frac{\hbar}{2m_3}\widehat{m}_j\nabla_i\widehat{n}_j \tag{11.132}$$

のように定義する。

ABM状態の特徴の一つは$\widehat{\boldsymbol{l}}$の空間変化が超流動流に寄与するということである。実際(11.128)を(11.129)に代入し，弱結合近似で$\boldsymbol{j}_s$を計算すると

$$j_{si} = 2\left(\frac{2m}{\hbar}\right)^2 \varDelta_{\mathrm{A}}^2 K_0 \left[(2\delta_{ij} - \widehat{l}_i\,\widehat{l}_j)v_{s_j} + \frac{\hbar}{2m}\left(\frac{1}{2}\delta_{ij} - \widehat{l}_i\,\widehat{l}_j\right)(\nabla\times\widehat{\boldsymbol{l}})_j\right] \tag{11.133}$$

となり，$\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}$に比例する項のほかに$\nabla\times\widehat{\boldsymbol{l}}$に比例する項が現れる。$\nabla\times\widehat{\boldsymbol{l}}$は磁性体での磁化$\boldsymbol{M}$の空間変化に伴う有効電流$\nabla\times\boldsymbol{M}$との類似性から考えると理解できる。また，超流動密度にも$\widehat{\boldsymbol{l}}$の方向による非等方性があり，$\boldsymbol{vs} /\!\!/ \widehat{\boldsymbol{l}}$のとき$\boldsymbol{j}_{s/\!\!/} = \rho_{s/\!\!/}\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}$と書き，$\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}} \perp \widehat{\boldsymbol{l}}$では$\boldsymbol{j}_{s\perp} = \rho_{s\perp}\boldsymbol{v}_s$と書くと，$\rho_{s\perp} = 2\rho_{s/\!\!/} = 4(2m/\hbar)^2K_1|\varDelta_{\mathrm{A}}|^2$となる。$\rho_{s\perp} > \rho_{s/\!\!/}$なのは$\boldsymbol{v}_{s/\!\!/}\widehat{\boldsymbol{l}}$のとき流れの方向とエネルギー・ギャップが消える方向が一致するため，準粒子が励起されやすくなることを考えれば理解できる。

超流動^{3}He-Bと違って，^{3}He-Aは流体として特異な振舞いをすることがわかった。^{3}He-Aの流体力学的性質をもう少し詳しくみてみよう。

Mermin-Hoの渦[13)]　^{3}He-Aでの流体力学の特徴が端的に表れる例として^{3}He-Aでの渦がある。超流動状態での渦についてはすでに超流動^{4}Heの場合に述べた。3–4節で述べたようにz方向に一様な渦では，そのまわりの超流動速度が(3.47)でまたエネルギーが(3.49)で与えられた。

^{4}He での渦と同じような渦が ^{3}He-A にも存在するがそれ以外にもいろいろな種類の渦が知られている。^{3}He-A の秩序変数は triad $(\widehat{\boldsymbol{m}}, \widehat{\boldsymbol{n}}, \widehat{\boldsymbol{l}})$ と $\widehat{\boldsymbol{d}}$ ベクトルで指定された。そのなかで $\widehat{\boldsymbol{d}}$ ベクトルはスピンに関係した量であり，流体力学では本質的な役割は演じない。簡単のため以下の議論では $\widehat{\boldsymbol{d}}$ の空間変化は無視することにする†。流体力学を考えるとき重要なのは triad の空間変化である。triad $(\widehat{\boldsymbol{m}}, \widehat{\boldsymbol{n}}, \widehat{\boldsymbol{l}})$ は互いに直交する三つの単位ベクトルであり，通常 11·9 図に示すように，$\widehat{\boldsymbol{l}}$ が $\widehat{\boldsymbol{z}}$ 方向を向いた $(\widehat{\boldsymbol{x}}, \widehat{\boldsymbol{y}}, \widehat{\boldsymbol{z}})$ という状態から Euler 角 (α, β, γ) で変換された状態として表す。このとき秩序変数は

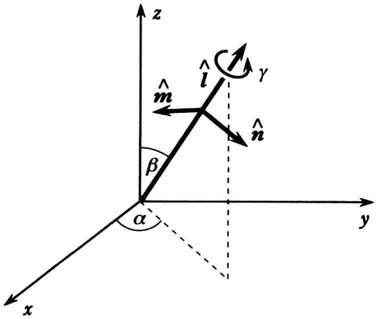
$$\Delta_{\mathrm{A}} e^{-i\gamma}(\widehat{\boldsymbol{m}} + i\widehat{\boldsymbol{n}}) \tag{11.134}$$

ただし，

$$\widehat{\boldsymbol{m}} = \begin{pmatrix} \cos\beta\cos\alpha \\ \cos\beta\sin\alpha \\ -\sin\beta \end{pmatrix}, \quad \widehat{\boldsymbol{n}} = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \tag{11.135}$$

となる。また

$$\widehat{\boldsymbol{l}} = \begin{pmatrix} \sin\beta\cos\alpha \\ \sin\beta\sin\alpha \\ \cos\beta \end{pmatrix} \tag{11.136}$$



11·9 図 秩序変数 $(\widehat{\boldsymbol{l}}, \widehat{\boldsymbol{m}}, \widehat{\boldsymbol{n}})$ の Euler 角 (α, β, γ) での表示。

† $\widehat{\boldsymbol{d}}$ の空間変化を取り入れるものは容易にできる。

である。角 α, β は $\widehat{\boldsymbol{l}}$ の方向を与える。また，γ は $\widehat{\boldsymbol{l}}$ の方向が与えられた後の $\widehat{\boldsymbol{l}}$ 軸まわりの回転角を表し，(11.134) で示したように各成分に共通な位相を表す。さらに，この Euler 角を用いると (11.132) で定義された超流動速度は

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}} = -\frac{\hbar}{2m}(\nabla\gamma + \cos\beta\nabla\alpha) \tag{11.137}$$

となる。

渦の構造を考えるとき，秩序変数の表示を通常の基底，$\widehat{\boldsymbol{p}}_x, \widehat{\boldsymbol{p}}_y, \widehat{\boldsymbol{p}}_z$ から，$\boldsymbol{e}_{\pm 1} = \mp 1/\sqrt{2}\,(\widehat{\boldsymbol{p}}_x \pm \widehat{\boldsymbol{p}}_y)$, $e_0 = \widehat{\boldsymbol{p}}_z$ に移しておくと以下の議論で便利である。この表示により，$\Delta_{\mathrm{A}} e^{-i\gamma}(\widehat{\boldsymbol{m}} + i\widehat{\boldsymbol{n}})i\widehat{\boldsymbol{p}}_i \equiv \sum_i \Delta_i \boldsymbol{e}_i$ で定義される。Δ_i は，

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= -\frac{\Delta_{\mathrm{A}}}{\sqrt{2}} e^{-i(\gamma+\alpha)}(1+\cos\beta) \\ \Delta_0 &= -\Delta_{\mathrm{A}} e^{-i\gamma}\sin\beta \\ \Delta_{-1} &= -\frac{\Delta_{\mathrm{A}}}{\sqrt{2}} e^{-i(\gamma-\alpha)}(1-\cos\beta) \end{aligned} \tag{11.138}$$

となる。γ と α が各成分の位相を決めるが，注目すべきは成分でその組合せが違っていることである。

表示 (11.138) を用いて ^{3}He-A での渦糸を考える。最初軸対称な渦を考えるので円筒座標 (r, θ, z) を用いる。最も簡単な渦は例えば $\widehat{\boldsymbol{l}} /\!/ \widehat{z}$ と $\widehat{\boldsymbol{l}}$ が空間的に変化しない場合で，このとき Euler 角は$\beta = 0$，また $r = -\theta, \alpha = 0$ とすると超流動 ^{4}He で得られた渦糸と同じような渦糸が得られる。(11.137) を用いると，超流動速度は，(3.47) と同様に

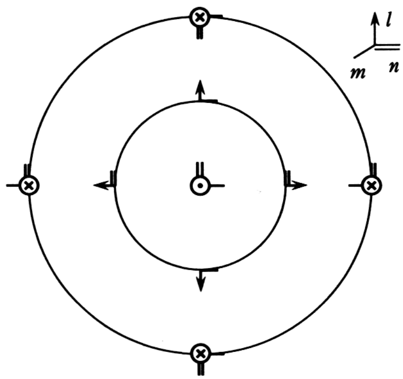
$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}} = \frac{\kappa}{2\pi r}\boldsymbol{e}_\theta \tag{11.139}$$

となる。ただし，$\kappa = h/2m_3$ である。このような渦糸では中心付近，コヒーレンス長の範囲では平衡状態の ^{3}He-A とは違った状態になり，流れのエネルギーの発散をカットしなければならない。単位長さ当たりの渦糸のエネルギーは (3.49) と同じように

$$\varepsilon = \pi\rho_{s\perp}\left(\frac{\hbar}{2m}\right)^2 \ln\frac{R}{\xi} \tag{11.140}$$

となる。ただし，R は容器の半径である。このような渦のことを中心が A 状態でないという意味で芯のある渦系という。

次に $\widehat{\boldsymbol{l}}$ の空間変化を考えると ^{3}He-A 特有の芯のない渦糸をつくることができる。$r = -\theta$ は芯のある渦同様にとり，$\widehat{\boldsymbol{l}}$ の空間変化は 11·10 図に示した



11·10図　芯のない渦糸 Mermin-Ho 構造および Anderson-Thoulouse 構造。中の円の内部の織目構造は容器の壁に $\hat{\boldsymbol{l}}$ ベクトルが垂直な Mermin-Ho 構造である。さらに triad を回転させ，外の円までの状態まで考えると Anderson-Thoulouse 構造になる。

ように $r=0$ で z 方向を向いた $\hat{\boldsymbol{l}}$ を中心から離れるにしたがい連続的に動径方向に倒していくという織目構造を考える。それは (11.136) より，$\alpha=\theta$ また $\beta(r)$ は r の単調増加関数を取れば実現される。このとき $r\to 0$ で発散が起こらないのは，(11.137) の 2 つの項が消し合い超流動速度が発散しないことからも明らかであるが，(11.138) からも確かめられる。$r\to 0$ で有限に残る成分は Δ_1 のみで，その位相はゼロである。位相がそれぞれ θ と 2θ になり特異性を示す Δ_0, Δ_{-1} の成分は $r\to 0$ で消える。このようにしてつくられた芯のない渦で，単調増加する $\beta(r)$ を境界 $r=R$ で $\beta(R)=\pi/2$ まで変化させてできた構造を Mermin-Ho の渦といい，$\beta(R)=\pi$ まで変化させた構造を Anderson-Toulouse の渦[4)]とよぶ。これらの構造が渦を表していることは (11.137) より，$\boldsymbol{v}_{\rm s}$ は $\boldsymbol{e}_\theta$ 方向に流れていること，したがって $\hat{z}$ 方向に角運動量を持った構造であることから明らかであるが，特に Anderson-Toulouse の渦では $r=R$ で考えると Δ_{-1} の成分だけが残り，その位相が 2θ，したがって，循環の量子数が 2 の渦である。

さて，実際の円筒容器に ^{3}He-A 流体を入れると Mermin-Ho の渦ができる。ここで強調する必要があるのは超流動 ^{4}He のように回転系での平衡状態として渦構造が表れるのではなくて，^{3}He-A では回転していない系の平衡状態として境界条件を満足させる構造が自然に渦構造になるということ

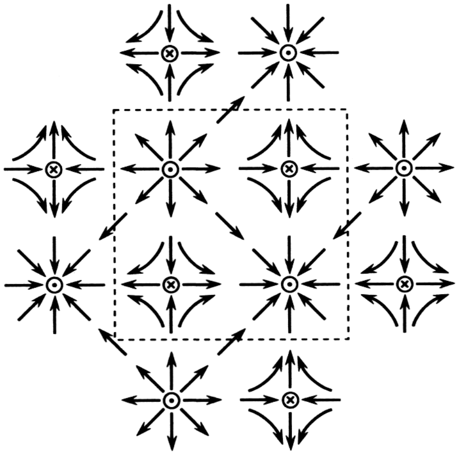
である。その境界条件はどうなっているか。壁での ^{3}He 原子の衝突が鏡面での衝突とみなせるような理想化された場合に考えてみよう。壁に垂直な方向を z 方向ととると衝突により，p_x, p_y は保存し，$p_z \to -p_z$ となる。したがって，秩序変数が z 成分を含めば秩序変数は壁の近くで変化し，凝縮エネルギー ΔF_s 程度の損失がある。損失がないための境界条件は，$\hat{\boldsymbol{l}} /\!/ \pm\hat{\boldsymbol{z}}$ となっていることである。Mermin-Ho の渦では $\alpha = \theta, \beta(R) = \pi/2$ で，$\hat{\boldsymbol{l}}$ は壁に垂直となり，確かにこの境界条件を満足している。β の γ 依存は上述の境界条件のもとでグラディエント・エネルギー $F_{\rm G}$ を最小にするということから決められる。$F_{\rm G}$ をβ の関数として計算し，それをβ で変分した式は非線形な微分方程式になるがその解は数値計算により求められる。結果はかなりよい近似で $\beta(r) = \pi r/2R$ と近似でき，また単位長さ当たりの渦のエネルギーも求められ

$$\varepsilon = 1.46\pi\rho_{s\perp}\left(\frac{\hbar}{2m}\right)^2 \qquad (11.141)$$

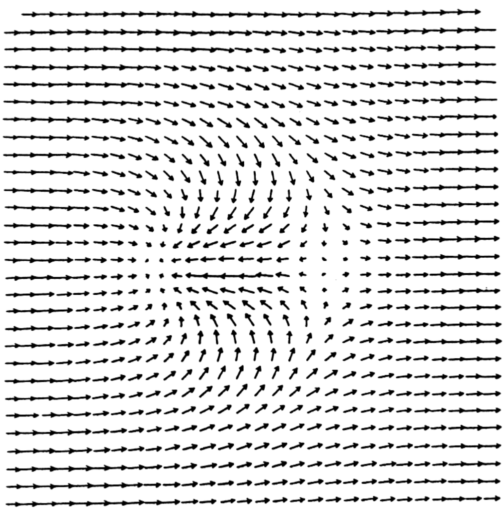
となる。芯のある渦のエネルギー (11.140) と比較すると，$v_{\rm s}$ の発散がないため ln の因子がないのが特徴である。

回転系での織目構造[15)]　回転超流動 ^{4}He については 7–1 節で述べた。回転系では量子化された渦糸が規則正しく格子状に並び，安定な格子は三角格子であった。また，単位格子の面積は回転速度 Ω で与えられ，単位格子を円で近似し，その半径を R とすると$\pi R^2 = \kappa/2\Omega$ であった。回転 ^{3}He-A での渦格子はどのようになるか，芯のない渦による格子ができるかどうかが問題になる。実際，芯のある渦と芯のない渦のエネルギーを比較すると例えば (11.140) と (11.141) のように芯のない渦には $\ln R/\xi$ の因子がない。したがって，回転があまり速くないとき，すなわち，R が十分大きいときには芯のない渦格子の方がエネルギーが低くなる。

芯のない渦格子としていくつかのタイプの渦格子が考えられたがそのうち一番エネルギーの低いのは Mermin-Ho に似た渦を並べたものである。もちろん，単に Mermin-Ho の渦を並べただけでは渦格子にはならない。そのヒントは (11.138) で示したように成分によって，位相 α と γ の組み合せが違い，$\hat{\boldsymbol{l}} /\!/ \pm\hat{\boldsymbol{z}}$ に対して$\gamma \pm \alpha$ であるということにある。いま 11·11 図のように，中心で$\hat{\boldsymbol{l}} /\!/ \hat{\boldsymbol{z}}$ と $\hat{\boldsymbol{l}} /\!/ -\hat{\boldsymbol{z}}$ となる 4 個の部分格子を単位格子とした周期的織目構造を考える。部分格子の面積を $\kappa/2\Omega$ に等しくすると超流動 ^{4}He での位相と同じように ^{3}He-A でも各成分共通の位相 γ はその中心の



11·11図　渦格子での $\hat{l}$ の織目構造。矢印は $\hat{l}$ の方向を表している。点線で囲んだのが単位格子で l が上向き⊙ と下向き⊗ の状態を 2 つずつ含む。磁場 $H=0$ である。



11·12図　磁場がかかったときの渦格子に現れる芯のない渦糸。$\hat{l}$ ベクトルが上向きの状態 (左側) と下向き (右側) の状態を 1 つずつ含む。$H=0$ での単位格子が 2 つに分裂したと考えられる。

まわりを一周すると 2π 変化する多価関数でなければならない。この γ による v_s の発散は Mermin-Ho 構造同様に α を適当に選ぶことにより消すことができる。それは $\hat{\boldsymbol{l}} /\!/ \hat{\boldsymbol{z}}$ の点のまわりを正方向に一周すると 2π だけ増加する多価関数を $\boldsymbol{\Phi}_u$ とし，同様に $\hat{\boldsymbol{l}} /\!/ -\hat{\boldsymbol{z}}$ の点のまわりを正方向に一周すると 2π だけ増加する多価関数を $\boldsymbol{\Phi}_d$ として

$$\begin{aligned} \gamma &= -\boldsymbol{\Phi}_u - \boldsymbol{\Phi}_d \\ \alpha &= \boldsymbol{\Phi}_u - \boldsymbol{\Phi}_d \end{aligned} \tag{11.142}$$

とすることにより実現される。実際，(11.142) が $\hat{\boldsymbol{l}} /\!/ \pm\hat{\boldsymbol{z}}$の点において特異性は示さないことは簡単に確かめられる。このようにして決められた $\hat{\boldsymbol{l}}$ の周期的織目構造を 11·11 図に示した。

このように芯のない渦格子構造が実現していることが NMR を用いて確かめられている。NMR の実験では磁場が存在するため 11·11 図の織目構造は変形している。単位格子にあった 4 個の部分格子は磁場が強くなると 2 個の部分格子を持つ 2 つの対に分裂する。対には $\hat{\boldsymbol{l}} /\!/ \hat{\boldsymbol{z}}$ と $\hat{\boldsymbol{l}} /\!/ -\hat{\boldsymbol{z}}$ が含まれ，それが互いに接近した織目構造になっている (11·12 図)。NMR ではこの中心付近に局在したスピン波の励起が観測され[16)]，芯のない渦格子構造の存在が示された。

参 考 文 献

液体ヘリウムに関する一般的な教科書，参考書(講義ノート，総合報告，会議のプロシーディング等の成書を含む)を挙げる。

[1] F.London: *Superfluids* vol.II (John Wiely & Sons, 1954).

現在でも十分教育的な内容を含み，当時の研究の雰囲気が伝わってくる古典的名著である。

[2] I.M.Khalatnikov: *An Introduction to the Theory of Superfluidity* (Benjamin, 1965).

二流体力学，励起量子の運動論の議論が詳しい。

[3] R.J.Donnelly: *Experimental Superfluidity* (University of Chicago Press, 1967).

[4] J.Wilks: *The Properties of Liquid and Solid Helium* (Clarendon Press, 1967).

[5] W.E.Keller: *Helium-3 and Helium-4* (Prenum Press, 1969).

上記三冊は, 少し古いが実験に関する内容が多く参考になる。

[6] D.F.Brewer(ed.): *Quantum Fluids* (North Holland, 1966).

[7] J.G.M.Armitage and I.E.Farquhar(ed.): *The Helium Liquids* (Academic Press, 1975).

[8] J.Ruvalds and T.Regge(ed.): *Quantum Liquids* (North-Holland, 1977).

[9] K.H.Bennemann and J.B.Ketterson(ed.): *The Physics of Liquid and Solid Helium*, Part I (1976), Part II (1978) (John Wiley & Sons).

上記四冊には，多くのテーマについてのすぐれた総合報告が含まれており参考になる。

[10] D.R.Tilley and J.Tilley: *Superfluidity and Superconductivity*, 2nd ed. (Bristol, Adam Hilger Ltd, 1986).

[11] J.Wilks and D.S.Betts: *An Introduction to Liquid Helium*, 2nd ed. (Clarendon Press, 1987).

いずれも第2版では話題が改めて取捨選択され，比較的新しい内容を含む。

[12] R.J.Donnelly: *Quantized vortices in helium II* (Cambridge University Press 1991).

超流動 ^{4}He の渦についての詳しい解説書。長い間このテーマに携わってきた著者とその協力者の仕事も多く含まれている。

[13] A.G.F.Wyatt and H.J.Lauter(ed.): *Exitations in Two-Dimensional and*

Three-Dimensional Quantum Fluids (Plenum Press, 1991).
比較的最近開かれた会議の報告で，多くの興味ある話題が含まれおり参考になる。

[14] A.Griffin: *Excitations in a Bose-Condensed Liquid* (Cambridge University Press 1993).
凝縮体を意識した多体問題が詳しく，中性子散乱の最近の測定結果とその解析も参考になる。

[15] D.Pines and P.Nozières: *The Theory of Quantum Liquids*, Vol.I *Normal Fermi Liquids* (Benjamin, 1966).
中性 (^{3}He) および荷電体 (プラズマ) についての Fermi 液体論の入門書。

[16] P.Nozières and D.Pines: *The Theory of Quantum Liquids*, Vol.II *Superfluid Bose Liquids* (Addison-Wesley, 1990).
Vol.I に続いて当初予定された刊の第 6 章のプレプリント (1964) が，Vol.II("古典シリーズ" の一冊) として刊行されたものである。

[17] D.Vollhardt and P.Wölfle: *The Superfluids Phases of Helium 3* (Taylor & Francis, 1990).
超流動 ^{3}He についての詳細な参考書。
最後に日本語で書かれた名著二冊を挙げておく。

[18] 中嶋貞雄：超伝導入門 (新物理学シリーズ 9，培風館，1971).

[19] 恒藤敏彦：超伝導・超流動 (現代の物理学 17，岩波書店，1993).

以下各章ごとの参考書，文献を挙げるが，上記のものを引用するときは，著者名と [ ] の番号のみを記す。

1章

1) 液体ヘリウムの初期の研究については次のものが参考になる。
K.Mendelssohn: *The Quest for Absolute Zero*, 2nd ed. (Taylor & Francis, 1977); Z.M.Galasiewicz: *Helium 4* (Pergamon Press, 1971); F.London: [1].

2) W.E.Keller: Chap. 7, 8, 9 in [5].

3) J. de Boer: Physica **14**(1948)139 ; *Proceeding of the International School of Physics*, Enrico Fermi Course XXI, ed. by G.Careri (Academic Press, 1963).

4) M.J.Buckingam and W.M.Fairbank: *Prog. in Low Temp. Phys.* Vol.III, ed. by C.J.Gorter (North-Holland, 1961).

5) G.Ahlers: Chap.2 in Part I of [9].

6) J.A.Lipa and T.C.P.Chui: Phys. Rev. Lett. **51**(1983)2291.

7) P.C. Hohenberg: Physica **109** & **110B**(1982)1436.

8) V.Dohm: J. Low Temp. Phys. **69**(1987)51.

2章

1) R.J.Donnelly: [3]; W.E.Keller: [5]; D.R.Tilley and J.Tilley: [10]; J.Wilks and D.S.Betts: [11].

2) A.J.Leggett は超流動の特性を，ここで示す 2 つの実験的事実により基本的に表すことができるとした。これについては 5–1 節で議論する。
3) E.L.Andronikashvili: J. Phys. USSR. **10**(1946)201.
4) 巽 友正：流体力学 (新物理学シリーズ 21，培風館，1982).
5) R.J.Donnelly: [12].

3章

1) 高橋康：物性研究者のための場の量子論 I (1974), II (1976) (新物理学シリーズ 16, 17 培風館).
2) K.Huang: *Statistical Mechanics*, 2nd. ed. (John Wiely & Sons, 1987).
3) 中嶋貞雄：相転移と素励起 (湯川秀樹・松原武生編：岩波講座 現代物理学の基礎 8，物性 II(第 2 版) 第 4 章, 岩波書店 1978).
4) P.W.Anderson: *Basic Notions of Condensed Matter Physics* (Benjamin, 1984).
5) O.Penrose and L.Onsager: Phys. Rev. **104**(1956)576.
6) R.L.Glauber: Phys. Rev. **130**(1963)2529.
7) P.C.Hohenberg and P.C.Martin: Ann. Phys.(N.Y.) **34**(1965)291.
8) E.P.Gross: J. Math. Phys. **4**(1963)195.
9) L.P.Pitaevskii: Soviet Phys.-JETP **13**(1961)451.
10) L.Onsager: Nuovo Cimento Suppl. **6**(1949)249.
11) R.J.Donnelly: Chap.4 in [12].
12) W.F.Vinen: Proc. Roy. Soc. **A260**(1961)218.
13) P.W.Karn, D.R.Starks and W.Zimmermann, Jr.: Phys. Rev. **B21**(1980)1797.
14) G.W.Rayfield and F.Reif: Phys. Rev. **136**(1964)A1194.

4章

1) O.Penrose and L.Onsager: Phys. Rev. **104**(1956)576.
2) W.L.McMillan: Phys. Rev. **A138**(1965)442.
3) M.H.Kalos, M.E.Lee and P.A.Whitlock: Phys. Rev. **B24**(1981)115.
4) L.Reatto and G.V.Chester: Phys. Rev. **155**(1967)88.
5) L.Reatto: J. Low Temp. Phys. **87**(1992)375.
6) L.D.Landau: J. Phys. USSR **5**(1941)71.
7) L.P.Pitaevskii: Soviet Phys.-JETP **9**(1959)830.
8) N.N.Bogoliubov: J. Phys. USSR **11**(1947)23.
9) R.P.Feynman: Phys. Rev. **94**(1954)262.
10) J.Gavoret and P.Nozières: Ann. Phys (N.Y.) **28**(1964)349.
11) R.P.Feynman and M.Cohen: Phys. Rev. **102**(1956)1189.
12) A.Miller, D.Pines and P.Nozières: Phys. Rev. **127**(1962)1454.
13) E.Manousakis and V.R.Pandharipande; Phys. Rev. **B30**(1984)5062; **B33**(1986)150.
14) T.J.Greytak: p.121 in [8].

15) K.Ohbayasi and M.Watabe(ed.): *Elementary Exitations in Quantum Fluids* (Springer Series in Solid-State Sciences, Vol.**79**, Springer-Verlag, 1989).
16) R.A.Cowley and A.D.B.Woods: Can. J. Phys. **49**(1971)177; R.A. Cowley: p.27 in [8].
17) H.R. Glyde: p.1 in [13].
18) H.R.Glyde and A.Griffin: Phys. Rev. Lett. **65**(1990)1454.
19) P.E.Sokol and W.M.Snow: p.47 in [13].
20) D.M. Ceperley and E.L.Pallock: Phys. Rev. Lett. **56**(1986)351; Can. J. Phys. **65**(1987)1416.
21) P.A.Whitlock and R.M.Panoff: Can. J. Phys. **65**(1987)1409.
22) W.M.Snow: Ph.D. thesis. (1990) Harvard University.
23) H.J.Maris: Phys. Rev. **A8**(1973)1980.

5章

1) A.J.Leggett: Physica Fennica **8**(1973)125 ; Chap.1 in *Low Temperature Physics Proceeding*, Blydepoort, South Africa, ed. by M.J.R.Hoch and R.H. Lemmer(Springer-Verlag, 1991).
2) F.Bloch: Phys. Rev. **166**(1968)415.
3) G.Baym: Chap.3 in *Mathematical Methods in Solid and Superfluid Theory* ed. by R.C.Clark and G.H.Derrick (Oliver and Boyd, 1969).
4) D.Forster: *Hydrodynamic Fluctuations, Broken Symmetry, and Correlation Functions* (W.A.Benjamin, Inc., 1975).
5) L.D.Landau: J. Phys. USSR. **5**(1941)71.
6) K.Miyake and K.Yamada: Prog. Theor. Phys. **56**(1976)1689.
7) P.C.Hohenberg and P.C.Martin: Ann. Phys. (N.Y.) **34**(1965)291.
8) I.M.Khalatnikov: Part II. in [2].
9) C.E.Chase: Proc. Roy. Soc. **A220**(1953)116.
10) V.P.Peshkov: J. Phys. USSR **8**(1944)131; **10**(1946)389.
11) V.P.Peshkov: Soviet Phys.-JETP **11**(1960)580; L.Wilks: [4].
12) R.Williams, E.A.Beaver, J.C.Fraser, R.S.Kagiwada and I.Rudnick: Phys. Lett. **29A**(1969)279.
13) B.D.Josephson: Phys. Lett. **21**(1966)608.
14) J.C.Ward and L.Wilks: Phil. Mag. **42**(1951)314; **43**(1952)48.
15) R.S.Shapiro and I.Rudnick: Phys. Rev. **A137**(1965)1383.
16) G.A.Williams, R.Rosenbaum and I.Rudnick: Phys. Rev. Lett. **42**(1979) 1282.
17) G.J.Jelatis, J.A.Roth and J.D.Maynard: Phys. Rev. Lett. **42**(1979)1285.
18) I.Rudnick: p.24 in *75th Jubilee Conference On Helium-4*, ed. by J.G.M. Armitage (World Scientific, 1983).
19) K.R.Atkins and I.Rudnick: Chap.2 in *Prog. Low Temp. Phys.* Vol.VI, ed. by C.J.Gorter (North-Holland, 1970).

20) D.J.Bergmann: Chap.I in *Physical Acoustics* Vol.XI, ed. by W.P.Mason and R.P.Thurston (Academic Press, 1975).
21) I.E.Dzyaloshinskii, E.M.Lifshitz and L.P.Pitaevskii: Adv. in Phys. **10** (1961)165.
22) C.W.F.Everitt, K.R.Atkins and A.Denenstein: Phys. Rev. **136**(1964) A1494.
23) J.Frenkel: *Kinetic Theory of Liquids* (Oxford University Press, 1946).
24) E.S.Sabisky and C.H.Anderson: Phys. Rev. **A7**(1973)790.
25) I.M.Khalatnikov and D.M.Chernikova:Soviet Phys.-JETP. **22**(1966)1336.; **23**(1966)274.

6章

1) L.D.Landau: J. Phys. USSR. **5**(1941)71.
2) R.P.Feynman: Chap.2 in *Prog. Low Temp. Phys.* Vol.I, ed. by C.J.Gorter (North-Holland, 1955).
3) W.E.Keller: Chap.8 in [5]; J.Wilks and D.S.Betts: Chap.14 in [11].
4) E.Varoquaux, W.Zimmermann, Jr. and O.Avenel: p.343 in [13].
5) P.W.Anderson: Revs. Mod. Phys. **38**(1966)298.
6) R.M.Bowley: J. Low Temp. Phys. **87**(1992)137.
7) J.S.Langer and J.D.Reppy: Chap.1 in *Prog. Low Temp. Phys.* Vol.VI, ed. by C.J.Gorter (North-Holland, 1970).
8) G.Kukich: Ph.D Thesis, (1970) Cornell University.
9) J.R.Clow and J.D.Reppy: Phys. Rev. **A5**(1972)427.
10) J.D.Reppy: J. Low Temp. Phys. **87**(1992)205.
11) H.Kojima, W.Veith, E.Guyon and I.Rudnick: J. Low Tem. Phys. **8**(1972) 187.
12) H.Kojima, W.Veith, E.Guyon and I.Rudnick: J. Low Tem. Phys. LT-13. Chap.1, p.279 (Plenum Press 1974).
13) J.S.Langer and M.E.Fisher: Phys. Rev. Lett. **19**(1967)560.
14) R.J.Donnelly: Chap.1 in [12].
15) R.J.Donnelly, R.N.Hills and P.H.Roberts: Phys. Rev. Lett. **42**(1979)725.
16) R.J.Donnelly: Chap.8 in [12].
17) O.Avenel and E.Varoquaux: Phys. Rev. Lett. **55**(1985)2704.
18) E.Varoquaux, M.W.Meisel and O.Avenel: Phys. Rev. Lett. **57**(1986)2291.
19) O.Avenel and E.Varoquaux: Proc.18th Int.Conf.on Low Temp. Phys. Japanese Jour. Appl. Phys. Vol.26 (1987) Suppl.26-3.
20) G.G.Ihas, O.Avenel, R.Aarts, R.Salmelin and E.Varoquaux: Phys. Rev. Lett. **69**(1992)327.
21) W.Zimmerman,Jr., O.Avenel and E.Varoquaux: Physica B **165** & **166** (1990)749.

22) A.Amar, Y.Sasaki, R.L.Lozes, J.C.Davis and R.E.Packard: Phys. Rev. Lett. **68**(1992)2624; J.C.Davis, J.Steinhauer, K.Shwab, Yu.M.Mukharsky, A.Amar, Y.Sasaki and R.E.Packard: Phys. Rev. Lett. **69**(1992)323.
23) C.M.Muirhead, W.F.Vinen and R.J.Donnelly: Phil. Trans. Roy. Soc. (Lond.) **A311**(1984)433.
24) R.J.Donnelly: Chap.8 in [12].
25) P.C.Hendry, N.S.Lawson, P.V.E.McClintock, C.D.H.Williams and R.M. Bowley: Phil. Trans. Roy. Soc.(Lond.) **A332**(1990)387.
26) P.V.E.McClintock and R.M.Bowley: p.567 in [13].
27) R.M.Bowley, P.V.E.McClintock, F.E.Moss, G.G.Nancolas and P.C.E. Stamp: Phil. Trans. Roy. Soc.(Lond.) **A307**(1982)201.
28) A.O.Caldeira and A.J.Leggett: Phys. Rev. Lett. **46**(1981)211, Ann. Phys. (N.Y.) **149**(1983)374.
29) D.R.Allum, P.V.E.McClintock, A.Phillips and R.M.Bowley: Phil. Trans. Roy. (Lond.) **A284**(1977)179.
30) R.M.Bowley and F.W.Sheard: Phys. Rev. **B16**(1977)244.
31) G.G.Nancolas, R.M.Bowley and P.V.E.McClintock: Phil. Trans. Roy. Soc.(Lond.) **A313**(1985)537.
32) R.J.Donnelly: Chap.8 in [12].

7章

1) R.L.Donnelly: Chap.3, 5, 7 in [12].
2) L.D.Landau and E.M.Lifshitz: Mechanics, 2nd ed. §39 (広重徹，水戸巌訳, 東京図書，1967).
3) G.B.Hess and W.M.Fairbank: Phys. Rev. Lett. **19**(1967)216.
4) R.E.Packard and T.M.Sanders: Phys. Rev. **A6**(1972)799.
5) R.P.Feynman: Chap.2 in *Prog. in Low Temp. Phys.* Vol.I, ed. by C.J. Gorter (North-Holland, 1955).
6) Tkachenko: Soviet Phys.-JETP **22**(1282)1966.
7) E.J.Yarmchuck and R.E.Packard: J. Low Temp. Phys. **46**(1982)479.
8) C.J.Gorter and J.H.Mellink: Physica **15**(1949)285.
9) H.E.Hall and W.F.Vinen: Proc. Roy. Soc. **A238**(1956)204,215.
10) I.L.Bekarevich and I.M.Khalatnikov: Sov. Phys. -JETP **13**(1961)643.
11) E.L.Andronikashvili and Y.G.Mamaladze: Rev. Mod. Phys. **38**(1966)567.
12) R.J.Arms and F.R.Hamma: Phys. Fluids **8**(1965)553.
13) G.Baym and E. Chandler: J. Low Temp. Phys. **50**(1983)57.
14) C.M.Muirhead, W.F.Vinen and R.J.Donnelly: Phil. Trans. Roy. Soc. (Lond.) **A311**(1984)433.
15) K.W.Schwarz: Phys. Rev. **B38**(1988)2398.
16) K.W.Schwarz: Phys. Rev. **B44**(1991)7563.
17) C.E.Swanson and R.J.Donnelly: J. Low Temp. Phys. **61**(1985)363.
18) W.F.Vinen: Proc. Roy. Soc. **A242**(1957)493.

19) K.W.Schwarz: Phys. Rev. **B31**(1985)5782.
20) J.Koplik and H.Levine: Phys. Rev. Lett. **71**(1993)1375.
21) J.T.Tough: Chap.3 in *Prog. in Low Temp. Phys.* Vol.VIII, ed. by D.F. Brewer (North-Holland, 1982).
22) D.R.Ladner, R.K.Childers and J.T.Tough: Phys. Rev. **B13**(1976)2918.
23) J.Yamauchi and K.Yamada: Physica **128B**(1985)45.
24) R.T.Wang, C.E.Swanson and R.J.Donnelly: Phys. Rev. **B36**(1987)5240.
25) R.J.Donnelly: Chap.7 in [12].

8章

1) J.M.Kosterlitz and D.J.Thouless: J.Phys. **C6**(1973)1181.
なお，Physics of Low Dimentional Systems, Proc. Kyoto Summer Institute, 1979 (理論物理学刊行会，1979) にある B.I.Halperin の講義録が参考になる。
2) D.J.Bishop and J.D.Reppy: Phys. Rev. Lett **40**(1978)1927.
3) V.Ambegaokar, B.I.Halperin, D.R.Nelson and E.D.Siggia: Phys. Rev. **B21** (1980)1806.
4) V.Ambegaokar and S.Teitel: Phys. Rev. **B19**(1979)1667.
5) I.Rudnick: Phys. Rev. Lett. **40**(1978)1454.

9章

1) P.Noziéres: *Theory of Interacting Fermi Systems* (Benjamin, 1961).
2) G.Baym and C.Pethick: *Landau Fermi-Liquid Theory* (John Wiley & Sons, 1991).
3) W.R.Abel, A.C.Anderson and J.C.Wheatley: Phys. Rev. Lett. **17**(1966) 74.

10章

1) J.Bardeen, L.N.Cooper and J.R.Schrieffer: Phys. Rev. **108**(1957)1175.
2) L.N.Cooper: Phys. Rev. **104**(1956)1189.
3) N.N.Bogoliubov: Nuovo Cim. **7**(1958)794.
4) V.L.Ginzburg and L.D.Landau: Zh. exsper. teor. Fiz, **20**(1950)1064.

11章

1) W.P.Halperin, C.W.Archie, F.B.Rasmussen, T.A.Alvesalo and R.C. Richardson: Phys. Rev. **B13**(1976)2124.
2) A.I.Ahonen, M.Krusius and M.A.Paalanen: J. Low Temp. Phys. **25**(1976) 421.
3) H.M.Bozler, M.E.R.Bernier, W.J.Gully, R.C.Richardson and D.M.Lee: Phys. Rev. Lett. **32**(1974)875.
4) A.J.Leggett: Rev. Mod. Phys. **47**(1975)331.
5) R.Balian and N.R.Werthaner: Phys. Rev. **131**(1963)1553.
6) P.W.Anderson and P.Morel: Physica **26**(1960)671; Phys. Rev. **123**(1961) 1911.

7) P.W.Anderson and W.F.Brinkman: Phys. Rev. Lett. **30**(1973)1108.

8) A.J.Leggett: Ann Phys. (N.Y.) **85**(1974)11.

9) A.Abragam and M.Goldman: Nuclear Magnetism: *Order and Disorder* (Clarendon Press, Oxford, 1982) の第4章。

10) D.D.Osherott, R.C.Richardson and D.M.Lee: Phys. Rev. Lett. **28**(1972) 885.

11) K.Maki and T.Tsuneto: Prog. Theor. Phys. **52**(1974)773.

12) R.A.Webb, R.E.Sager and J.C.Wheatley: Phys. Rev. Lett. **35**(1975)1010.

13) N.D.Mermin and T.L.Ho: Phys. Rev. Lett. **36**(1976)594.

14) P.W.Anderson and G.Toulouse: Phys. Rev. Lett. **38**(1977)508.

15) T.Fujita, M.Nakahara, T.Ohmi and T.Tsuneto: Prog. Theor. Phys. **60** (1978)671.

16) H.K.Seppälä, P.J.Hakonen, M.Krusius, T.Ohmi, M.M.Salomaa, J.T.Simola and G.E.Volovik: Phys. Rev. Lett. **52**(1984)1802.

索　引

ア　行

カ　行

サ　行

タ　行

ナ　行

ハ　行

マ　行

ヤ　行

ラ　行

著者略歴

山田一雄
やま だ かず お

1960年　名古屋大学大学院理学研究科
　　　　博士課程修了
1960年　名古屋大学理学部助手
1967年　名古屋大学理学部助教授
1985年　名古屋大学教養部教授
1992年　名古屋大学名誉教授

大見哲巨
おお み てつ お

1969年　名古屋大学大学院理学研究科
　　　　博士課程修了
1969年　名古屋大学理学部助手
1971年　京都大学理学部助手
1985年　京都大学理学部講師
1989年　京都大学理学部助教授

1995年7月20日　初 版 発 行

新物理学シリーズ28
超　流　動

著　者　山田一雄
　　　　大見哲巨
発行者　山本　格

発行所　株式会社　培　風　館
東京都千代田区九段南4-3-12・郵便番号102
電話(03)3262-5256(代表)・振替00140-7-44725

D.T.P.(株)アベリー・平文社印刷・三水舎製本

PRINTED IN JAPAN

ISBN4-563-02428-7 C3342